MAT1013
(Analyse 1)
Hiver 2013

Corrigé du quizz n°3.

N.B.: il y avait 3 versions différentes du quizz, mais les questions sont similaires. Je ne corrige qu'une seule version.

1.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$. (V).

C'est vrai. On peut montrer la convergence par exemple en majorant : $\frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$ et $\sum_2^\infty \frac{1}{(n-1)^2}$ est une série de Riemann convergente. Pour calculer la somme, on écrit (comme fait dans un exercice) :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad \text{donc}$$

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1.$$

(b) Si $\sum u_n$ CV et que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq v_n$, alors $\sum v_n$ CV (F)

C'est faux ! Revoir le cours, le théorème de comparaison dit : si $\sum v_n$ CV et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\sum u_n$ CV.

(c) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ converge. (F).

Faux : Par exemple : $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Ou : $\lim \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+2}$ diverge : (V).

Vrai car $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge. (V)

Vrai, par exemple avec le test du quotient de D'Alembert sur la série des valeurs absolues:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

donc $\sum \frac{x^n}{n!}$ ACV donc CV.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ Converge. (V).

Vrai, car c'est $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ avec $\frac{3}{2} > 1$

donc série de Riemann convergente.

(g) $\forall x \neq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. (F).

Faux : on a vu en cours/exercice que cette série CV ssi $|x|<1$.
Par contre on a bien : $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

$\boxed{2}$ Montrer que $\sum \frac{3^n+4^n}{5^n}$ converge et calculer sa somme.

On sait que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ CV (série géométrique de raison $\frac{3}{5} < 1$) et que sa somme vaut :

$$\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

De même, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ CV et sa somme vaut $\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$.

Donc par opération sur les séries CV, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ CV et

sa somme vaut : $\frac{5}{2} + 5 = \boxed{\frac{15}{2}}$.