MAT 1013 (Analyse 1)
Hiver 2013.

Corrigé de l'examen Intra n° 2

Exercice 1 :

(a) Cours

(b) On doit montrer que pour toute suite (x_n) tendant vers a, $f(x_n)$ tend vers $f(a)$.

Soit (x_n) une suite tendant vers a.

$$f(x_n) = x_n^3 - 2x_n.$$

Par opération sur les limites de suites, on a :

$x_n^3 - 2x_n$ tend vers $a^3 - 2a$, i.e.,

$f(x_n)$ tend vers $f(a)$.

Exercice 2 :

(a) Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante, et tend vers 0,

donc d'après le théorème des séries à signe alterné,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

. $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, avec $\frac{1}{2} \leq 1$

donc d'après le théorème sur les séries de Riemann,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas absolument

• Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^3}$.

Elle est de même nature que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

On $\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3}$ avec $3 > 1$, donc $\sum_{n=1} \frac{1}{n^3}$ est une

série de Riemann convergente,

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente.

Par conséquent, elle est aussi convergente (sans avoir besoin d'utiliser le théorème des séries à signe alterné.

(b) On note que: $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1}$.

Calculons les sommes partielles de la série:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Donc on a: $\lim S_n = \frac{3}{4}$.

Donc la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ converge, et sa somme totale est :

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}}$$

(c) L'ensemble des x tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$ est convergente est : $[-3, 3[$.

(Justifications non demandées : posons $a_n = \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$.

On a : $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{3} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

donc $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{3}$.

Donc, d'après le test du quotient de D'Alembert,

si $|x| < 3$, $\sum |a_n|$ converge, donc $\sum a_n$ converge.

De plus, si $|x| > 3$, on a : $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$,

donc $|a_n|$ tend vers $+\infty$.

En particulier, (a_n) ne tend pas vers 0, donc

$\sum a_n$ diverge.

Reste le cas $|x| = 3$:

. Si $x = 3$, alors $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ avec $\frac{1}{2} < 1$,

donc $\sum a_n$ est une série de Riemann divergente.

. Si $x = -3$, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, donc par théorème des séries à signe alterné, $\sum a_n$ converge.)

(d) Si $|x|<1$, On sait que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge et que $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$.

On sait de plus que $\sum |x^n|$ converge aussi, puisque $|x^n| = |x|^n$ et que $|x|<1$.

Donc $\sum x^n$ est absolument convergente.

Par un théorème du cours, si une série est absolument convergente, alors tout réarrangement l'est aussi, et sa somme est égale à la somme de la série de départ.

Donc si (a_n) est un réarrangement de (x^n), alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (absolument) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 3 :

(a) Posons $a_n = n^k r^n$.

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot |r|$ donc tend vers $|r|$ pour $n \to +\infty$.

Or $|r|<1$, donc par le test du quotient de D'Alembert, $\sum |a_n|$ converge.

Donc $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

(b) On a :

$$P(n)\, r^n = a_0 r^n + a_1 n r^n + a_2 n^2 r^n + \dots + a_d n^d r^n.$$

Chacun des termes de la somme est de la forme $a_k n^k r^n$, donc d'après (a), pour chaque k, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_k n^k r^n$ est convergente.

Comme une somme de séries convergentes est convergente, on en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, r^n$ <u>est convergente</u>.

<u>Exercice 4</u> :

(a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, comme on a $0 \leq a_n \leq u_{n+1} - u_n$, on en déduit, par comparaison des séries, que $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ diverge.

Calculons les sommes partielles de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$= u_{n+1} - u_0$$

Comme c'est une série <u>à termes positifs</u> qui <u>diverge</u>, on sait que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Donc on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = +\infty, \text{ i.e., } \boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty}.$$

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors par comparaison, $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ converge aussi. D'après le calcul du (a), on en déduit que $(u_{n+1} - u_0)$ a une limite finie, donc que <u>u_n a une limite finie.</u>

Comme $0 \leq a_n \leq b_n$, on a aussi par comparaison que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ <u>converge</u>.

Notons S_n la suite des sommes partielles de $\sum (u_{n+1} - u_n)$,

A_n celle de $\sum a_n$

B_n celle de $\sum b_n$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq u_{k+1} - u_k \leq b_k$ donc en sommant pour k de 0 à n :

$$A_n \leq S_n \leq B_n \quad (*)$$

Or on a vu que $S_n = u_{n+1} - u_0$, donc

$$\lim(S_n) = l - u_0 .$$

D'autre part, par définition, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

et $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Donc par passage à la limite de l'inégalité $(*)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq l - u_0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k , \quad \text{i.e :}$$

$$\boxed{u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq l \leq u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k}$$

Exercice 5 :

(a) Posons $a_n = \dfrac{x^n \cos(n x)}{4^n}$.

On a : $|a_n| \leq \left|\frac{x}{4}\right|^n$,

et $\sum \left|\frac{x}{4}\right|^n$ est convergente (série géométrique avec $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$).

Donc par comparaison, $\sum |a_n|$ est convergente, et $\sum a_n$ aussi.

(b) $|\pi| < 4$ donc $f(\pi)$ a bien un sens.

$$f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n \cos(n\pi)}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{4}{4-\pi}}.$$

$\left|\frac{\pi}{2}\right| < 4$ donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a bien un sens, et

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{\cos(n\pi)}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{8}\right)^n \cdot (-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\pi}{8}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{-\pi}{8}\right)} = \boxed{\frac{8}{8+\pi}}$$

(c) Notons $S_n(x)$ la n^e somme partielle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cos(2nx)}{4^n}$.

On a :

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos(2kx)}{4^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{x^k \cos(2kx)}{4^k} \right|$$

(par inégalité triangulaire)

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{|x|}{4}\right)^k \quad (\text{car } |\cos(2kx)| \leq 1)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{4}\right)^k \quad (\text{qui a un sens car } |x| < 4)$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{|x|}{4}} = \frac{4}{4-|x|}.$$

Or par définition, $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$,

donc par passage à la limite, on obtient, pour $|x|<4$:

$$\boxed{|f(x)| \leq \frac{4}{4-|x|}}.$$

(d) $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \cdot \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{4^n}.$$

On : $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ pair avec } n = 2k. \end{cases}$

D'où : $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} \frac{(-1)^k}{4^{2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\right)^k$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1-\left(-\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\right)} = \boxed{\frac{256}{256+\pi^2}}.$$

Exercice 6.

(a) Cours.

(b) Par hypothèse, (u_n) est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet (au moins) une suite extraite convergente, donc (u_n) a au moins une valeur d'adhérence. Si l en est une, alors $l = \lim\limits_{k\to\infty}(u_{n_k})$ pour une certaine suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad 4 \leq u_{n_k} \leq 6$ par hypothèse, donc par passage à la limite : $4 \leq l \leq 6$.

(c) Rappelons la définition de la limite :

$\lim u_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Ici on suppose que (u_n) ne tend pas vers l, donc il faut écrire la négation de cette propriété, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |u_n - l| \geqslant \varepsilon. \quad (*)$$

(d) On va construire v_k étape par étape en utilisant la question (c).

- Posons $N = 0$ dans $(*)$. Alors il existe $n_0 > 0$ tel que $|u_{n_0} - l| \geqslant \varepsilon$.

. Posons maintenant $N = n_0$. $(*)$ nous dit qu'il existe

$n_1 > n_0$ tel que $|u_{n_1} - l| \geq \varepsilon$

. De même, on peut construire, en itérant le processus, des entiers n_k tels que :

. $n_k > n_{k-1}$.

et . $|u_{n_k} - l| \geq \varepsilon$.

On pose $v_k = u_{n_k}$. C'est bien une suite extraite de (u_n), car $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k < \dots$

Et, par construction, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $|v_k - l| \geq \varepsilon$.

(e) (v_k) est une suite extraite de (u_n), donc est aussi bornée. Donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (v_k) a une valeur d'adhérence l'.

Comme toute suite extraite de (v_k) est aussi une suite extraite de (u_n), l' est donc aussi une valeur d'adhérence de (u_n).

De plus, d'après (d) on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $|v_k - l| \geq \varepsilon$.

donc en particulier c'est vrai pour les termes de la suite extraite de (v_k) qui tend vers l'. D'où, par passage à la limite : $|l' - l| \geq \varepsilon$.

(f) On suppose que (u_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence l.

On veut montrer que (u_n) tend vers l.

Supposons par l'absurde que (u_n) ne tend pas vers l.

Alors, en utilisant (c)-(d)-(e), on en déduit que

(u_n) a une valeur d'adhérence l' telle que

$|l'-l| \geqslant \varepsilon$. avec $\varepsilon > 0$. En particulier $l' \neq l$.

Contradiction.

Donc (u_n) tend vers l.

(g) Soit α une valeur d'adhérence de (u_n).

Alors α est la limite d'une certaine suite extraite

$(v_k) = (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Construisons une autre suite extraite en décalant les rangs de 1 :

on pose $\underline{w_k = u_{n_k+1}}$.

On a : $w_k = f(u_{n_k})$.

(u_{n_k}) tend vers α, et f est <u>continue</u>, donc

$f(u_{n_k})$ tend vers $f(\alpha)$.

(w_k) est une suite extraite de (u_n), tendant vers

$f(\alpha)$, donc $f(\alpha)$ est une valeur d'adhérence de (u_n).