MAT 1013
Analyse 1.

Correction Examen Intra n° 1 (du 19/02)

Exercice 1

(a) M est un majorant de E dans $\mathbb{R}$ si:

[2pts] $M \in \mathbb{R}$, et $\forall x \in E,\ x \leq M$.

(b)

	Borne sup.	Max.	Borne Inf.	Min.
[4pts] $A = \left\{ 5 - \frac{2}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$	5	NON	3	3
[4pts] $B = \left\{ (-1)^n n - \frac{3}{n} - n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$	0	NON	NON	NON
[4pts] $C = \left\{ x \in \mathbb{Q},\ \lvert x - \sqrt{2} \rvert \leq \sqrt{2} \right\}$	$2\sqrt{2}$	NON	0	0

Explications: (non demandées)

A est facile.

B: si n impair, $\overbrace{(-1)^n n - \frac{3}{n} - n}^{b_n} = -2n - \frac{3}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$,

donc B n'est pas minorée, pas de borne inf. ni de minimum. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n < 0$, et si n pair,

$b_n = -\frac{3}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Donc $0 = \operatorname{Sup} B$, mais $0 \notin B$ donc B n'a pas de minimum.

C : $|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} \leq x - \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$

$\iff 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Donc $C = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 2\sqrt{2} \}$.

$0 \in \mathbb{Q}$, donc $0 \in C$ et $0 = \operatorname{Inf} C = \operatorname{Min} C$.

$2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mais par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in C, \ x > 2\sqrt{2} - \varepsilon$.

donc $2\sqrt{2} = \operatorname{Sup} C$, et C n'a pas de maximum.

Exercice 2 :

(a) • On a $f(0) = 1$ et $f(-1) = (-2+1)^2 = 1$

donc $f(0) = f(-1)$ avec $0 \neq -1$ donc

[4pts] $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

• Soit $y \in \mathbb{R}^+$. On cherche à trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que

$y = (2x+1)^2$.

Il suffit de poser $x = \frac{\sqrt{y} - 1}{2}$. (ou $\frac{-\sqrt{y} - 1}{2}$).

Alors $(2x+1)^2 = (\sqrt{y})^2 = y$, i.e. : $f(x) = y$.

[4pts] Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

(b) • Le même exemple que pour f. fonctionne.

On a : $0 \in \mathbb{Z}$, $-1 \in \mathbb{Z}$, et

$$g(0) = g(-1) = 1$$

[4pts] donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective.}}$

• Montrons par exemple que 0 n'est pas image par g d'un élément de $\mathbb{Z}$. Supposons que $n \in \mathbb{Z}$ soit tel que $g(n) = 0$.

Alors $(2n+1)^2 = 0$, donc $2n+1 = 0$ et $n = -\frac{1}{2}$.

Or $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

[4pts] Donc $\boxed{g \text{ n'est pas surjective.}}$

Rq : on pourrait dire de façon plus générale :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n+1$ est impair,

donc $(2n+1)^2$ est impair. Donc les entiers pairs ne sont pas atteints par g.

[en fait, même certains entiers impairs ne sont pas atteints par g. Précisément, y est dans l'image de g si et seulement si

$\frac{\sqrt{y}-1}{2} \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{-\sqrt{y}-1}{2} \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

y est le carré d'un entier impair ($y = 1, 9, 25, 49, \ldots$).]

Exercice 3: [4 pts par question]

(a) Pour toute suite (u_n) jamais nulle, si (u_n) tend vers 0, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

$\boxed{\text{FAUX}}$. Prendre par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

On a bien $\lim (u_n) = 0$, mais $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

(par contre on peut dire : $[(u_n) \to 0] \Rightarrow [\left(\frac{1}{|u_n|}\right) \to +\infty]$.)

(b) (u_n) décroissante $\Rightarrow$ (u_n) non minorée.

$\boxed{\text{FAUX}}$: par exemple $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante, et minorée par 0.

(c) (u_n) décroissante $\Rightarrow$ (u_n) majorée

$\boxed{\text{VRAI}}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq \dots \leq u_0,$$

donc (u_n) est majorée par u_0.

(d) (u_n) bornée et monotone $\Rightarrow$ (u_n) converge vers une limite finie

$\boxed{\text{VRAI}}$.

(u_n) est monotone, i.e. croissante ou décroissante.
(u_n) est bornée, i.e. majorée et minorée.

Si (u_n) est croissante, comme elle est majorée, alors elle converge, d'après le thm du cours.

Si (u_n) est décroissante, comme elle est minorée, on sait qu'elle converge (même théorème).

Dans tous les cas (u_n) converge (vers une limite finie)

(e) (u_n) bornée $\Rightarrow$ (u_n) majorée.

VRAI car bornée signifie : majorée et minorée.

(f) (u_n) tend vers $+\infty$ $\Rightarrow$ (u_n) croissante et non majorée.

FAUX car (u_n) pas forcément croissante

Par exemple $u_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante. $(1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \ldots)$

Exercice 4.

(a) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq 3$.

[10 pts]

- Initialisation : $a_0 = 2 \leq 3$.
- Transmission : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $a_n \leq 3$.

Alors :

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 9}{6} \leq \frac{3^2 + 9}{6} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$\leq \frac{18}{6} = 3.$$

Donc, par principe de récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \leq 3.$$

(b) Calculons $a_{n+1} - a_n$:
[8pts]

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 9}{6} - a_n = \frac{a_n^2 + 9 - 6a_n}{6}$$

$$= \frac{(a_n - 3)^2}{6}$$

Donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (a_n) est croissante.

[Rq : on peut aussi le montrer par récurrence (mais c'est plus long) :

. $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{13}{6} \geqslant 2$ donc $a_0 \leq a_1$.

. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, $a_n \leq a_{n+1}$,

alors $a_n^2 \leq a_{n+1}^2$ donc $\frac{a_n^2 + 9}{6} \leq \frac{a_{n+1}^2 + 9}{6}$,

i.e $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.]

(c) D'après (a), (a_n) est majorée (par 3).
[8pts]
D'après (b), (a_n) est croissante.

Donc par un théorème du cours, (a_n) converge vers une limite finie.

Soit l sa limite. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 9}{6}.$$

Donc par opération sur les limites, on obtient :

$$l = \frac{l^2 + 9}{6}$$

d'où : $\ell^2 - 6\ell + 9 = 0$

$(\ell-3)^2 = 0$

$\ell = 3.$

Donc $\boxed{\lim(u_n) = 3}$

Exercice 5.

(a)
[5pts]

$\lim(u_n) = 0$ si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$

(b)
[15pts]

Soit $\varepsilon > 0$.

On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$n > N \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon.$

(v_n) est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$

Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$. Comme $\lim(u_n) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon'$.

Alors, si $n > N$, $|u_n v_n| < \varepsilon' |v_n| \leq \varepsilon' M = \varepsilon$

donc $n > N \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon.$

D'où : $\boxed{\lim(u_n v_n) = 0.}$

(c)

[Bonus +10pts]

⚠ On ne peut pas utiliser un produit de limites,

car le nombre de termes du produit dépend de n

Par exemple, la suite $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \dots \times \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ termes}}$

Chaque terme du produit tend vers 1,

mais x_n ne tend pas vers 1. (x_n tend vers e, voir en exercices).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) tend vers 0, on sait qu'il existe N tel que $n > N \Rightarrow |u_n| < 1$.

et il existe N' tel que $n > N' \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

Alors si $n > \max(N, N')$, on a :

$$|u_n^n| = |u_n|\,|u_n^{n-1}| < \varepsilon\,|u_n|^{n-1} < \varepsilon \quad \text{car } |u_n| < 1.$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} (u_n^n) = 0.}$