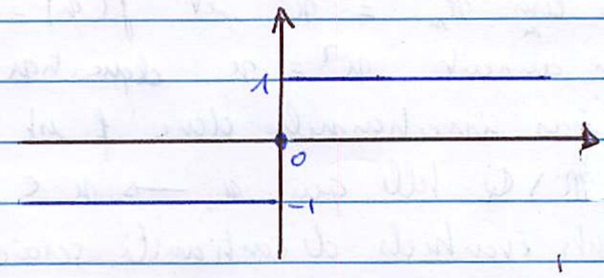
MAT 1013 : Feuille d'exercice 9

Fonctions continues

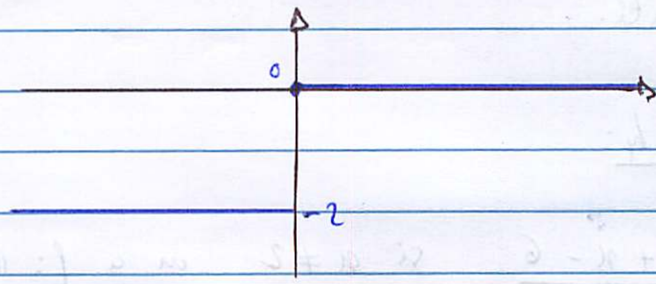
Exercice 1 :

ⓐ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



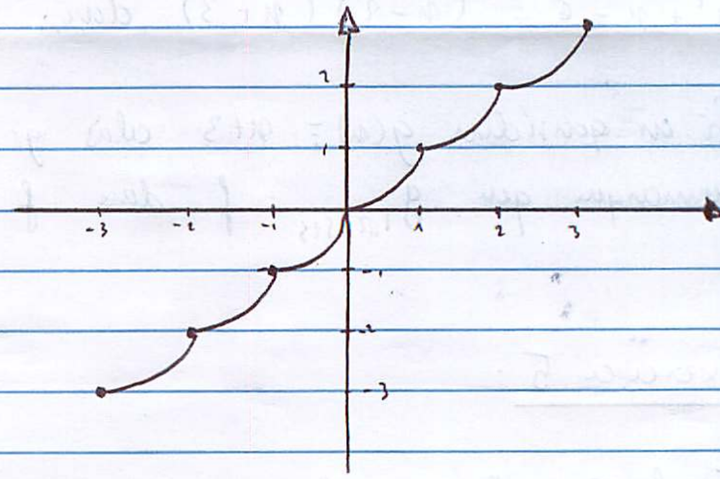
f est constante en dehors de 0 donc continue mais si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_n x_n = 0$ alors $\lim_n f(x_n) = 1$ et $f(0) = 0$ donc f n'est pas continue en 0.

ⓑ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| - x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



On procède de la même façon on a alors f continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ⓒ $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

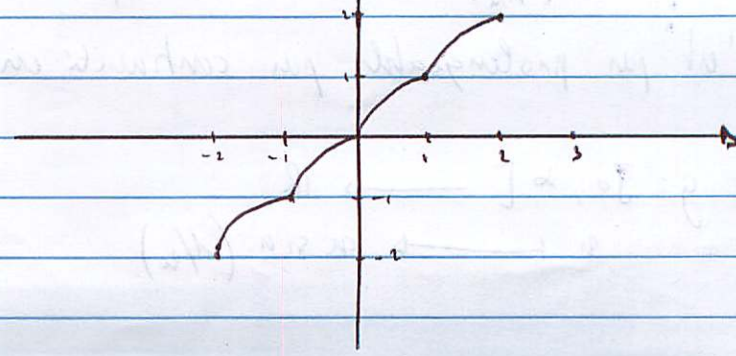


f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ car somme de fonctions continue sur cet ensemble.
Soit $m \in \mathbb{Z}$ alors soit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} m$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]m, m+1[$ alors $\lim_n f(x_n) = m + \lim_n (x_n - m)^2 = m$

Maintenant soit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} m$ telle que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]m-1, m[$ alors $\lim_n f(y_n) = m - 1 + \lim_n (y_n - (m-1))^2 = m$

Ainsi qu'une suite tende vers m par valeurs supérieures ou inférieures la limite de son image par f sera la même. Donc si on choisit une suite quelconque convergente vers m on aura $\limsup_n f(x_n) = \liminf_n f(x_n) = f(m)$ donc la continuité.

ⓓ $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$



La même démonstration peut être faite.

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $(x_n) \in \mathbb{Q}$ telle que $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ tout élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ peut être approché par une telle suite). Alors $\lim_n f(x_n) = \lim_n x_n^2 = x^2$ et $f(x) = x$ donc si f était continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on aurait $x^2 = x$ équation dont les solutions sont 0 et 1 qui ne sont pas irrationnels donc f est discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Soit $(x_n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{Q}$ alors par le même raisonnement les seuls points éventuels de continuité seraient 0 et 1.
Si on considère alors une suite x_n quelconque telle que $x_n \longrightarrow 0$ ou 1 alors les sous-suites extraites de rationnels ou d'irrationnels tendent vers 0 ou 1 on a alors $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(x_{\varphi(n)}) = \lim_n f(x_{\psi(n)}) = 0$ ou 1 donc la continuité.

Exercice 4 :

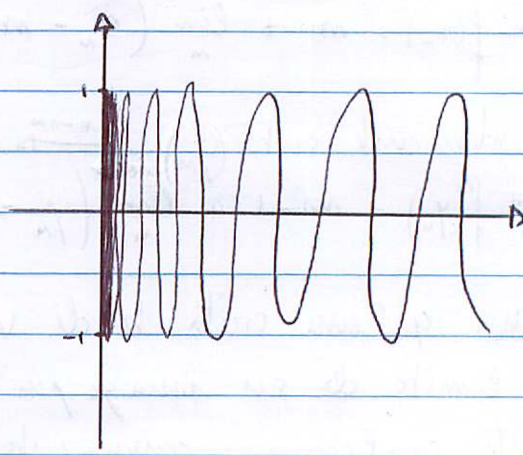
$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ si $x \neq 2$ on a $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ donc $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3$

Si on considère $g(x) = x+3$ alors $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et est continue et on remarque que $g_{|\mathbb{R} \setminus \{2\}} = f$ donc f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

(a) $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(1/x)$



Soit $x_n = \dfrac{1}{(4n+1)\pi/2}$ alors $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

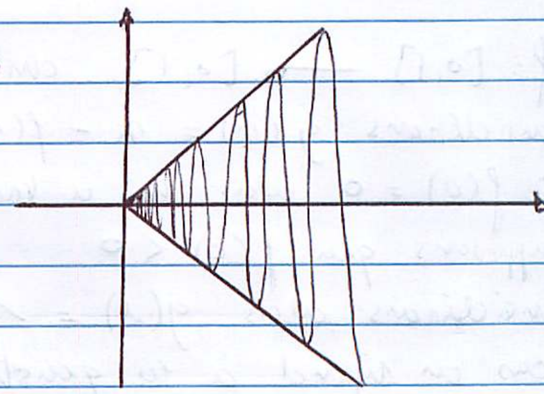
$y_n = \dfrac{1}{(4n+3)\pi/2}$ alors $y_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Mais $\sin\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = 1$ et $\sin\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0.

(b) $g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x \sin(1/x)$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telle que $\lim_n a_n = 0$

Alors $|g(a_n)| < a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ donc $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$



Donc la fonction est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0. On a alors

$$h : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in]0, \infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 11 :

(a) $f :]0,1[\longrightarrow]a, b[\qquad a, b \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto a + (b-a)x$

$g :]0,1[\longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto \sin(3\pi x)$

$h :]0,1[\longrightarrow [0, 1/4[$

$x \longmapsto (x - 1/2)^2$

$i :]0,1[\longrightarrow]1, +\infty[$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$

$j :]0,1[\longrightarrow]-\infty, 0[$

$x \longmapsto \ln(x)$

$k :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan(\pi x - \pi/2)$

(b) $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

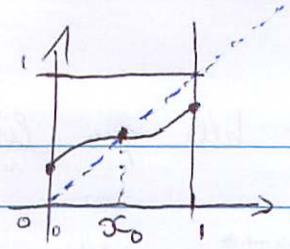
Alors $f :]0,1[\longrightarrow]a, b[$

$x \longmapsto a + (b-a)x$ est bijective

(c) $I = \mathbb{R}$ ou $I =]-\infty, 0[$ ou $]1, \infty[= I$

Les fonctions i, j et k vérifient cette propriété

Exercice 12



$f : [0,1] \to [0,1]$ continue

Considérons $g(x) = x - f(x)$ alors g est continue et $g(0) = -f(0) \leq 0$

si $f(0) = 0$ alors on a trouvé $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$ donc

supposons que $f(0) < 0$

Considérons alors $g(1) = 1 - f(1)$ alors soit $f(1) = 1$ auquel cas on répond à la question soit $f(1) < 1$ mais $0 < f(1) < 1$ donc $g(1) > 0$.

Ainsi si $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$ on a $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$ donc en appliquant le TVI on sait qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$ donc $f(x_0) = x_0$

Exercice 14 :

Soit $m > 0$ posons $h(x) = mx - \cos x$ alors h est une fonction continue sur $]0,\pi/2[$ et on peut la prolonger par continuité sur $[0,\pi/2]$ par une fonction $\tilde{h}$ telle que $\tilde{h}(0) = -1 < 0$ et $\tilde{h}(\pi/2) = m\pi/2 > 0$

En appliquant le TVI à $\tilde{h}$ on sait qu'il existe $x_0 \in]0,\pi/2[$ tel que $\tilde{h}(x_0) = 0$ (car $\tilde{h}(0) \neq 0$ et $\tilde{h}(\pi/2) \neq 0$) donc il existe $x_0 \in]0,\pi/2[$ tel que $h(x_0) = 0$ donc $\cos x_0 = m x_0$.

La fonction $h(x)$ est croissante car mx est croissante et $-\cos x$ aussi donc injective donc la solution est unique.

Exercice 15

ⓐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

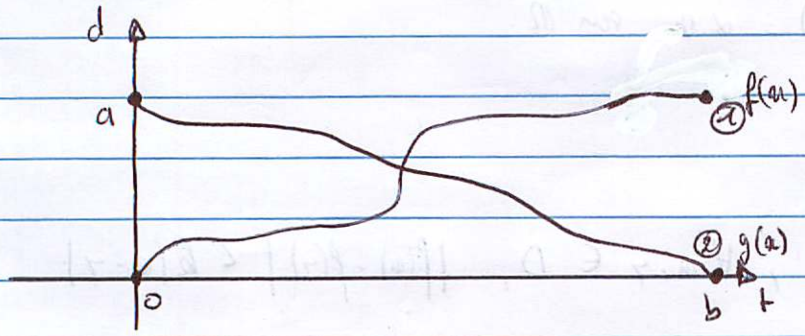
Supposons que f n'est pas surjective donc il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq p$. Cependant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc il existe $M > p$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = M$ et de même pour $m < p$ en considérant que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Or f est continue donc en appliquant le TVI toutes valeurs entre m et M possède un antécédent ce qui est contradiction avec notre hypothèse donc f est surjective.

ⓑ P est un polynôme de degré impair donc $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ et P est continue donc d'après la question précédente P est surjective donc P possède au moins une racine.

(Ici on considère $a_p > 0$ si $a_p < 0$ alors les limites sont opposées)

Exercice 16



L'axe des abscisses représente le temps écoulé, l'axe des ordonnées la distance parcourue. On superpose les courbes du lundi et du mardi. Comme la distance en fonction du temps est continue il y a nécessairement un point d'intersection c'est ce que l'on voulait. On considère $h : [0,b] \to [0,a]$ $h(x) = f(x) - g(x)$ et on applique le TVI car h vérifie les conditions.

Exercice 18

$f(x) = ax + b$ est une fonction croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$. En effet si $a > 0$, $x > y$ alors $ax > ay$ et $ax + b > ay + b$ il en est de même pour la décroissance.
Donc f est injective mais f est aussi un polynôme de degré impair donc surjective f est donc bijective elle possède donc une fonction réciproque.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = ax + b$ alors $y - b = ax$ et $\frac{y-b}{a} = x$
$g(y) = \frac{y-b}{a}$ est la fonction réciproque de f

Si $a = 0$ $f(x) = b$ donc f n'est pas bijective.

Exercice 10

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$

ⓐ $\alpha = f(1)$ alors $f(n) = f(n-1+1) = f(n-1) + \alpha = f(n-2) + 2\alpha = \dots$
$= n\alpha$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \alpha n$
$f(0) = 0$ donc $f(0) = f(n-n) = f(n) + f(-n) = 0$ et $f(-n) = -f(n)$
Donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \alpha n$

ⓒ $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $f(p/q) = \alpha\, p/q$

$f(p) = f(q\, p/q) = q\, f(p/q) = \alpha p$ donc $f(p/q) = \alpha\, p/q$

(d) Par la question précédente $f(x) = \alpha x$ sur $\mathbb{Q}$ donc par densité de $\mathbb{Q}$ et continuité de f, $f(x) = \alpha x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

(a) f est continue

Soit y fixé et $x_n \longrightarrow y$ dans D alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(x_n) - f(y)| \leq k|x_n - y|$ et $\lim_n |x_n - y| = 0$ donc $\lim_n |f(x_n) - f(y)| = 0$ et f est continue.

(b) $\alpha \in]0,1]$ donc la même démonstration fonctionne.

Exercice 3

(a) On a $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - 1 \leq \lim_{x \to 0^+} E(1/x)$

Donc $\lim_{x \to 0^+} E(1/x) = +\infty$

De la même façon $E(1/x) \leq 1/x$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0^-} E(1/x) = -\infty$

(b) $E\left(1/x\right) \leq 1/x \leq E\left(1/x\right) + 1$

$x E\left(1/x\right) \leq 1 \leq x E\left(1/x\right) + x$ et $0 \leq 1 - x E\left(1/x\right) \leq x$

Donc si $\lim_{x \to 0} x = 0$ alors $\lim_{x \to 0} 1 - x E(1/x) = 0$ donc $\lim_{x \to 0} x E(1/x) = 1$

(c) Pour $x > 1$, $E(1/x) = 0$ donc $\lim_{x \to \infty} x E(1/x) = 0$