MAT1013 : Feuilles d'exercices 6
Séries Numériques

Exercice 1

ⓐ Pour quels $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge ?

Un critère de converge est de calculer $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$ si $x \in \mathbb{R}^*$

Donc si $x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ne converge pas

Si $x = 0$ la série est convergente vers 0

Si $|x| < 1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ et $S_{n+1} = 1 + x S_n$

Donc $S_n - (1 + x S_n) = -x^{n+1}$

$S_n(1-x) = -x^{n+1} + 1$ et $S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

Donc $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Remarque : On pouvait directement utiliser la suite des sommes partielles

ⓑ Soit $a, b \in \mathbb{R}$, pour que $\sum_{n=0}^{\infty} (an+b)$ converge, il faut que nécessairement $\lim_{n \to \infty} (an+b) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} an = -b$ ce qui est absurde sauf si $a = 0$ et $b = 0$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} an+b$ converge ssi $a = b = 0$

Exercice 2

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

ⓐ Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n$ converge

Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_n$ alors $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_n + b_n$

$C_n = A_n + B_n$ On $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ et $\lim_{n \to \infty} B_n = B$

Donc par linéarité et opération sur les limites on a $\lim_{n \to \infty} C_n = A + B$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n$ converge.

ⓑ Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n$ diverge

Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ alors $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k + b_k = A_n + B_n$

et $B_n = C_n - A_n$ donc si C_n est convergente on a

$\lim_{n \to \infty} B_n = \lim_{n \to \infty} C_n - \lim_{n \to \infty} A_n = C - A$ donc B_n est convergente

ce qui est une contradiction.

ⓒ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge implique t-il $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n$ diverge ?

Non, le vérifie en posant $a_n = (-1)^n$ $b_n = (-1)^{n+1}$

Exercice 3 :

ⓐ $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+3}}$ $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente

ⓑ $b_n = \dfrac{n^2/100 + n + 2}{1 + 3n + n^2}$ $\lim_{n \to \infty} b_n = \dfrac{1}{100}$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente

ⓒ $c_n = \dfrac{3^n + 4^n}{5^n} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ étant convergente car $3/5 < 1$ et $4/5 < 1$ on

peut dire que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est somme de deux série convergente donc convergente.

ⓓ $d_n = \dfrac{3^n - 7^n}{5^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} -(7/5)^n$ est divergente car $7/5 > 1$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n - (7/5)^n$ est divergente.

ⓔ $e_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2}$; $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{k+1} - \dfrac{k+1}{k+2} = -\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \to \infty} -1$

Donc la série est convergente

ⓕ $f_n = \dfrac{1}{n+3}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+3} \approx \sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ or la convergence d'une

série ne tient pas à un nombre fini de termes donc $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+3}$ est divergente

ⓖ $g_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{n} \leq n$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$

et $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n$ est divergente donc $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ est divergente.

Exercice 4

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle . $\forall\, n \geq 1 \quad a_n = u_n - u_{n-1}$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1} = u_n - u_0$$

Donc si u_n converge la suite des sommes partielles converge donc la série est convergente et réciproquement si la série converge alors la suite des sommes partielles est convergente donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = u_{n+1} - u_0 \xrightarrow{n\to\infty} l - u_0$$

Exercice 5

ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge-t-elle ?

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge vers 1

ⓑ $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n^2 \leq n^2$ donc $n^2 - n \leq n^2$ et $\frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$

Or $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ qui est une série convergente

donc par comparaison (le théorème) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ est convergente

ⓒ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé alors $n^2 + np \geq n^2$ donc $1/n(n+p) \leq 1/n^2$

et par comparaison $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}$ est une série convergente

On $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = -\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{(n+p)-1} + \frac{1}{(n+p)-1} - \frac{1}{(n+p)-2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$

car ces sommes sont convergentes

$$= -\frac{1}{p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{(n+p)-1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+p)-1} - \frac{1}{(n+p)-2} \right) + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{p} \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} - \dots - 1 \right) = \frac{1}{p} \left(1 + \dots + \frac{1}{p} \right)$$

Exercice 7

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ à termes positifs convergente.

ⓐ Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge

Comme b_n est bornée positive on a $\exists M > 0$ tel que $b_n < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n b_n \leq M a_n$ et a_n est le terme général d'une série convergente donc par comparaison, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ est convergente

ⓑ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, considérons la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{n=0}^{k} a_n^p$ alors $|S_q - S_m| = |a_q^p + \cdots + a_{m+1}^p| < |a_q + \cdots + a_{m+1}|^p$

car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs donc $(a_q + \cdots + a_{m+1})^p > a_{m+1}^p + \cdots + a_q^p$ $p \in \mathbb{N}^*$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est une série convergente on peut donc appliquer le critère de cauchy à S_n qui est donc une série convergente.

Remarque : On pouvait considérer la suite bornée $(a_n)^{p-1}$ et la série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Exercice 8

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries à termes positifs et convergentes

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a

$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$ donc $(x+y)^2 \geq 4xy$ et $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$

Donc $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n}$ a_n et b_n étant positifs

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sont des séries convergentes donc $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n$ est convergente et par comparaison $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ aussi.

ⓑ On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors $\sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{n}$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ n'est pas convergente.

Exercice 9 : cf les notes de Collin p. 36

ⓐ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n \cdot n} + \dots$

On a donc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{(n-1)n}{(n+1)\cdot(n+1)} - \frac{(n-1)(n-2)}{n \cdot n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

Or $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \geq 0$ car $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n+1}$

$\frac{(n-1)n}{(n+1)^2} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \geq 0$ car $\frac{(k-1)k}{n^2} \leq \frac{(k+1)k}{(n+1)^2}$ etc...

Donc $x_{n+1} - x_n \geq 0$ donc $x_{n+1} \geq x_n$

ⓑ $x_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{(n-(k+1))}{n}\right)$

$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Or u_n est une suite croissante convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq u_n$. Or $u_n \leq e$ et notamment par la limite de u_n donc x_n est croissante, majorée par e donc convergente.

ⓒ $x_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \dots + \frac{(n-1)}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}$

Donc pour $k \leq n$:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{(n-1)}{n} + \dots + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} \leq \sum_{j=0}^{n} C_n^j \left(\frac{1}{n}\right)^j$$

ⓓ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $l \geq u_k$

En effet on a $x_n \geq 1 + 1 + \dots + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} \geq u_k$

car $\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} > 1$ et en passant à la limite sur n on a

$l \geq u_k$.

ⓔ Ainsi on a $l \geq u_n \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\lim_{k \to \infty} u_k = e \leq l$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = l \leq e$

Donc $l = e$

Exercice 11:

Ici on a $\forall k \in \mathbb{N}$ $a_k \leq 9$
Donc si on pose $b_k = \frac{a_k}{10^k}$ alors $b_k \leq 9 c_k$ où $c_k = \frac{1}{10^k}$

c_k est le terme général d'une série convergente donc par comparaison la série $\sum b_k$ sera convergente