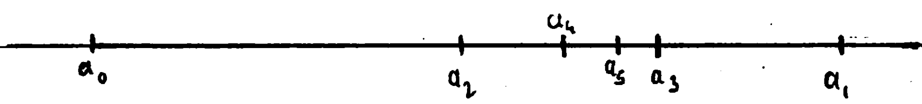
MA1013 : Feuille d'exercices 5
Suites monotones, suites de Cauchy, Suites bornées

Exercice 8

Soit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ on peut supposer $a_0 < a_1$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$

① 

② $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$, on va le démontrer par récurrence

Pour $n = 0$ on a $|a_1 - a_0| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^0}$ donc le cas de base est vrai.

Supposons alors que pour n fixé, $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$.

Alors $|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\dfrac{a_{n+1} + a_n}{2} - a_{n+1}\right| = \left|\dfrac{a_n - a_{n+1}}{2}\right| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^{n+1}}$

Donc le pas de récurrence est vérifié, le principe de récurrence nous dit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$

③ On remarque tout d'abord que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$
a_{n+2} est donc le milieu du segment (a_n, a_{n+1}) (l'ordre des termes n'a pas d'importance). Les termes suivants seront donc milieu de segments contenus dans (a_n, a_{n+1}) donc si $p \geq n+2$, a_p est entre a_n et a_{n+1}

④ Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{|a_1 - a_0|}{2^N} < \varepsilon$ (pourquoi ??)

et ceci $\forall n$ $\mathbb{N}$ tels que $n > N$.
Or $|a_{N+1} - a_N| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ $p > N+1$ on sait que $a_p \in (a_N, a_{N+1})$

Donc pour $p, q > N+1$, $|a_p - a_q| < |a_{N+1} - a_N| < \varepsilon$

Ainsi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

⑤ $(a_{n+1} - a_n) = \left(\dfrac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n\right) = \left(\dfrac{a_{n-1} - a_n}{2}\right) = \dots = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n (a_1 - a_0)$

On peut prouver cette formule par récurrence.

On a donc
$$a_{n+1} - a_n = (-1/2)^n (a_1 - a_0)$$
$$a_n - a_{n-1} = (-1/2)^{n-1} (a_1 - a_0)$$
$$\cdots$$
$$a_1 - a_0 = (a_1 - a_0)$$

$$a_{n+1} - a_0 = \sum_{h=0}^{n} (-1/2)^h (a_1 - a_0)$$ en sommant ces égalités.

Donc $a_{n+1} - a_0 = \sum_{h=0}^{n} (-1/2)^h (a_1 - a_0) = (a_1 - a_0)\left(\frac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}\right)$ car $|\frac{-1}{2}| < 1$

et la série $\sum_{h=0}^{n} (-1/2)^h$ est géométrique.
$$a_{n+1} - a_0 = (a_1 - a_0)\left(\frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, car de Cauchy, on peut passer à la limite et on obtient :

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_0 = (a_1 - a_0) \times \frac{2}{3}$ donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3}$

Exercice 9

$$u_n = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h}$$

(a) u_n est croissante car $u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{1}{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) On veut $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_{2n} - u_n| \geq 1/2$

Pour $n=1$ on a bien $|u_2 - u_1| = 1/2$

Supposons que pour n fixé, $|u_{2n} - u_n| \geq 1/2$ alors $|u_{2(n+1)} - u_{n+1}| = |u_{2n+2} - u_{n+1}|$

$$|u_{2n+2} - u_{n+1}| = \left|u_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)\right| \geq \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right|$$
$$\geq \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right| \geq \frac{1}{2}$$

Donc par principe de récurrence, $|u_{2n} - u_n| \geq 1/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$ on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$

Fixons $\varepsilon = 1/2$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N \quad |u_p - a_q| < 1/2$

Mais pour p fixé si $q = 2p$, on vient de prouver que $|u_p - u_{2p}| \geq 1/2$ on obtient donc une contradiction.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

(d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non convergente car pas de Cauchy donc non majorée (non bornée) donc qui tend vers $+\infty$.

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jamais nulle et telle que $\lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}$

ⓐ On suppose $\ell < 1$ donc $\exists\, r > 0$ tel que $\ell < r < 1$ donc $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\ell - r > \varepsilon > 0$

Or $\lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ donc pour ε, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N$

on a $\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| < \varepsilon$ donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell < \varepsilon$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell + \varepsilon < r$

Ainsi $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right| < r^{n-N}$ et $|u_n| < r^{n-N} |u_N|$

Donc $0 \leq |u_n| < r^{n-N} |u_N|$

Or la suite $v_n = r^{n-N}|u_N|$ tend clairement vers 0 donc la suite $|u_n|$ tend vers 0. Il en est alors de même pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ⓑ On suppose $\ell > 1$ alors de même $\exists\, R > 1$ tel que $\ell > R > 1$ et $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\ell - R > \varepsilon$.

Or $\lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ donc pour ε $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a

$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| < \varepsilon$ donc $-\varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell$ et $\ell - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

Donc $R < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Ainsi $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right| > R^{n-N}$

et $|u_n| > R^{n-N} |u_N|$

Or la suite $u_n = R^{n-N}|u_N|$ tend clairement vers $+\infty$ $(R > 1)$ donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

ⓒ Si $\ell = 1$, on ne peut rien définir.

$u_n = (-1)^n$ ne possède pas de limite

$v_n = 1/n+1$ converge vers 0

$w_n = n$ tend vers $+\infty$

$s_n = -\sqrt[3]{n}$ tend vers $-\infty$

Exercice 2 :

ⓐ $u_n = \frac{a^n}{n^p}$ donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a\, n^p}{(n+1)^p}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} |a| = a$ car $a \in \mathbb{R}_+$

Donc si $a > 1$ la suite tend vers $+\infty$

si $a < 1$ la suite converge vers 0

si $a = 1$ alors la suite u_n converge vers 0

ⓑ $v_n = \frac{a^n}{n!}$ alors $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Donc la suite v_n converge vers 0

ⓒ $w_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ alors $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{(2n)!\,((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$

$$= \frac{4n^2+6n+2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 4 > 1$$

La suite $|w_n| = w_n$ tend alors vers $+\infty$

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$

Alors $v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1}$

$$= \frac{(n-(n+1))(u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n(n+1)}$$

$$> \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{n\,u_n}{n(n+1)} = \frac{u_{n+1} - u_n}{n+1} > 0$$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 4 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$

Alors $a_0 = 0$ $a_1 = \sqrt{2}$ $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1,8477$ $a_3 = \sqrt{2+a_2} \approx 1,9615$

On a $a_0 = 0 \leq 2$ supposons que pour n fixé $a_n \leq 2$ alors $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} \leq \sqrt{4} = 2$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq 2$ par principe de récurrence.

De même $a_1 \geq a_0$ car $\sqrt{2} > 0$ supposons alors pour n fixé que $a_{n+1} \geq a_n$

alors $a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \geq \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$ donc par principe de récurrence

$a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite est croissante, bornée entre 0 et 2 donc

convergente. On note l sa limite alors l vérifie l'équation $l^2 = l + 2$

par unicité de la limite et la relation $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$

Donc $l^2 - l - 2 = 0$ avec $\Delta = 9$ $l_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ $l_2 = -1$

Donc $l = 2$ car $l_2 < 0$.

Exercice 5 :

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = 2a_n^2$

ⓐ Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim_n a_n = 0$ ou $1/2$

Posons $\lim_n a_n = \ell$ alors $\lim_n a_{n+1} = \ell = 2 \lim_n a_n^2 = 2\ell^2$
Donc $2\ell(\ell - 1) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1/2$

ⓑ Si $a_0 = 1$ alors $a_1 = 2 \cdot a_0^2 = 2$ donc $a_0 < a_1$. Supposons que pour n fixé, $a_{n+1} > a_n$ alors $a_{n+2} = 2a_{n+1}^2 > 2a_n^2 = a_{n+1}$. Ainsi par principe de récurrence, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et son premier terme est $a_0 = 1$ or d'après ⓐ si la suite est convergente sa limite est soit 0 soit $1/2$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

ⓒ En posant $a_0 = 0$ alors la suite tend bien vers 0
En remarquant que $a_{n+1} = 2^{2n+1} a_0^2$ on a alors $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{2n+1} a_0^2}{2^{2n-1} a_0^2} = 4 > 1$

donc la suite a_n ne peut converger vers $1/2$.

Exercice 6

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$

ⓐ On a en effet $0 < u_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} < (n+1)\frac{1}{n+1} = 1$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$
$$< \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2} = 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, bornée donc convergente.

Exercice 10

ⓐ $0 < a < 1$ un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - u_n| \leq a^n$
Soit $p > q \in \mathbb{N}$ alors $|u_p - u_q| = |u_p - u_{p-1} + u_{p-1} - \dots + u_{q+1} - u_q|$

$$\leq |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \dots + |u_{q+1} - u_q|$$
$$\leq \sum_{k=q}^{p-1} a^k = a^q \sum_{k=0}^{p-1-q} a^k = \frac{a^q(1 - a^{p-q})}{1-a} = \frac{a^q - a^p}{1-a}$$

Or $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy car $0<a<1$ donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q > N$ on a $|a^p - a^q| < \varepsilon$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(b) Posons $u_n = \ln(n)$ alors la suite vérifie la condition requise et n'est pas de Cauchy.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante et tendant vers 0.
On pose $v_n = u_0 - u_1 + u_2 - \dots + (-1)^n u_n$

(a) Soient $p, k \in \mathbb{N}$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad u_p - u_{p+1} \geq 0$
Si k est pair alors $u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - u_{p+3} + \dots + u_{p+k} = (u_p - u_{p+1}) + (u_{p+2} - u_{p+3}) + \dots + u_{p+k}$
donc supérieur ou égal à 0
$0 \leq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - u_{p+3} + \dots + u_{p+k} = u_p + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \dots + (u_{p+k} - u_{p+k-1})$
donc majoré par u_p puisqu'on ajoute un terme négatif.
On a donc $0 \leq u_p - u_{p+1} \dots + u_{p+k} \leq u_p$
Si k est impair alors $u_p - u_{p+1} + \dots - u_{p+k} = (u_p - u_{p+1}) + \dots + (u_{p+k-1} - u_{p+k}) \geq 0$
et de même $0 \leq u_p + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \dots + (u_{p+k-1} - u_{p+k-2}) - u_{p+k} \leq u_p$

(b) Ainsi soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N \quad u_n < \varepsilon$
Donc si $k \in \mathbb{N}$ alors $|v_{n+k} - v_n| = |(-1)^{n+1} u_{n+1} + \dots + (-1)^{n+k} u_{n+k}|$
$= |u_{n+1} + \dots + (-1)^{k-1} u_{n+k}| < |u_{n+1}| < \varepsilon$
Donc la suite v_n est de Cauchy donc convergente

Exercice 14

(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée alors $\forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_N| > M$
Soit $M_1 > 0$ alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{N_1}| > M_1$
Soit $M_2 > M_1$ alors $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ et on peut choisir $N_2 > N_1$ tel que $|u_{N_2}| > M_2$
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante strictement et non majorée alors on peut trouver une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(k) = N_k$ et $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $|u_{\varphi(k)}| = |u_{N_k}| > M_k$.
On peut prouver ça par récurrence en supposant que φ existe pour les k premiers entiers et en construisant $\varphi(k+1)$: Soit $M_{k+1} > M_k$ alors il existe $N_{k+1} > N_k$ tel que $|u_{N_{k+1}}| > M_{k+1}$ donc par principe de récurrence φ est bien définie sur $\mathbb{N}$.
On a donc construit une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ telle que $\forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ alors $|u_{\varphi(n)}| > M$.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle alors cette suite est soit bornée soit non bornée.
Si elle est bornée alors par le théorème de B.W. on peut extraire une sous-suite qui tend vers une limite finie.
Si elle n'est pas bornée alors elle est soit non majorée soit non minorée ou les deux mais alors on peut se ramener aux deux cas précédent.
Si elle est non majorée alors grâce (a) on sait que l'on peut extraire une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Si elle est non minorée alors en utilisant le même principe on est capable d'extraire une sous-suite tendant vers $-\infty$.

(c) Oui
Soit u_n la suite constante égale à 0
soit v_n la suite telle que $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$ .. $v_n = n$
Soit w_n —————— $w_1 = -1$, $w_2 = -2$ —— $w_n = -n$
Alors la suite f_n où on mélange ces trois suite possède une sous-suite convergent vers 0, une qui tend vers $+\infty$ une autre enfin qui tend vers $-\infty$