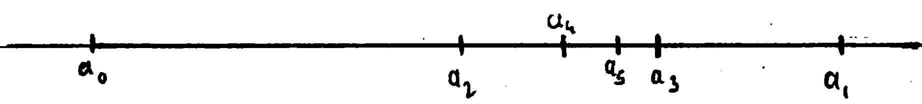
MA1013 : Feuille d'exercices 5
Suites monotones, suites de Cauchy, Suites bornées

Exercice 8

Soit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ on peut supposer $a_0 < a_1$.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$

① 

② $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$, on va le démontrer par récurrence

Pour $n = 0$ on a $|a_1 - a_0| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^0}$ donc le cas de base est vrai.
Supposons alors que pour n fixé, $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$.

Alors $|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\dfrac{a_{n+1} + a_n}{2} - a_{n+1}\right| = \left|\dfrac{a_n - a_{n+1}}{2}\right| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^{n+1}}$

Donc le pas de récurrence est vérifié, le principe de récurrence nous dit alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$

③ On remarque tout d'abord que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$
a_{n+2} est donc le milieu du segment (a_n, a_{n+1}) (l'ordre des termes n'a pas d'importance). Les termes suivants seront donc milieu de segments contenus dans (a_n, a_{n+1}) donc si $p \geq n+2$, a_p est entre a_n et a_{n+1}

④ Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{|a_1 - a_0|}{2^N} < \varepsilon$ (pourquoi ??)

et ceci $\forall n$ $\mathbb{N}$ tels que $n > N$.
Or $|a_{N+1} - a_N| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^N}$ et $\forall p \in \mathbb{N} \quad p > N+1$ on sait que $a_p \in (a_N, a_{N+1})$

Donc pour $p, q > N+1$, $|a_p - a_q| < |a_{N+1} - a_N| < \varepsilon$

Ainsi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

⑤ $(a_{n+1} - a_n) = \left(\dfrac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n\right) = \left(\dfrac{a_{n-1} - a_n}{2}\right) = \dots = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n (a_1 - a_0)$

On peut prouver cette formule par récurrence.

On a donc
$$a_{n+1} - a_n = (-1/2)^n (a_1 - a_0)$$
$$a_n - a_{n-1} = (-1/2)^{n-1} (a_1 - a_0)$$
$$\cdots$$
$$a_1 - a_0 = (a_1 - a_0)$$

$$a_{n+1} - a_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1/2)^k (a_1 - a_0)$$ en sommant ces égalités.

Donc $a_{n+1} - a_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1/2)^k (a_1 - a_0) = (a_1 - a_0)\left(\frac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}\right)$ car $|\frac{-1}{2}| < 1$

et la série $\sum_{k=0}^{n} (-1/2)^k$ est géométrique.
$$a_{n+1} - a_0 = (a_1 - a_0)\left(\frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, car de Cauchy, on peut passer à la limite et on obtient :

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_0 = (a_1 - a_0) \times \frac{2}{3}$ donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3}$

Exercice 9

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(a) u_n est croissante car $u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{1}{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) On veut $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_{2n} - u_n| \geq 1/2$

Pour $n=1$ on a bien $|u_2 - u_1| = 1/2$

Supposons que pour n fixé, $|u_{2n} - u_n| \geq 1/2$ alors $|u_{2(n+1)} - u_{n+1}| = |u_{2n+2} - u_{n+1}|$

$$|u_{2n+2} - u_{n+1}| = \left|u_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)\right| \geq \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right|$$
$$\geq \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right| \geq \frac{1}{2}$$

Donc par principe de récurrence, $|u_{2n} - u_n| \geq 1/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$ on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$

Fixons $\varepsilon = 1/2$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p,q \geq N \quad |u_p - a_q| < 1/2$

Mais pour p fixé si $q = 2p$, on vient de prouver que $|u_p - u_{2p}| \geq 1/2$ on obtient donc une contradiction.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

(d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non convergente car pas de Cauchy donc non majorée (non bornée) donc qui tend vers $+\infty$.