MAT 1013 : Feuille d'exercices 4
Limites de suites, comparaisons et opérations

Exercice 10 :

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

① $u_0 = 1$ $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $u_2 = \sqrt{1+u_1} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$
$u_3 = \sqrt{1+u_2} \approx 1,598$ $u_4 = \sqrt{1+u_3} \approx 1,6161$ $u_5 = \sqrt{1+u_4} \approx 1,6174$

② On va montrer que $u_{n+1} \geq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_1 \geq u_0$ (cas de base)
Etape de récurrence : On suppose pour $n \in \mathbb{N}$ fixé que $u_{n+1} \geq u_n$
on va alors montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
$u_{n+2} = \sqrt{1+u_{n+1}} \geq \sqrt{1+u_n}$ par hypothèse de récurrence $u_{n+1} \geq u_n$ et croissance de la fonction racine.
Or $\sqrt{1+u_n} = u_{n+1}$ par définition donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
Le principe de récurrence est donc vérifié pour la relation $u_{n+1} \geq u_n$ qui est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

③ On va montrer que $u_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on va le faire par récurrence.
Cas de base $n = 0$, $u_0 = 1 \leq 2$
Hérédité : On suppose pour n fixé entier naturel que $u_n \leq 2$
Montrons qu'alors $u_{n+1} \leq 2$: $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$ par hypothèse de récurrence et croissance de $\sqrt{\cdot}$.
Donc par principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq 2$.

④ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et bornée dans $\mathbb{R}$ donc d'après un théorème très important de notre cours, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

⑤ Posons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ qui existe par ④ et qui est donc unique par unicité de la limite d'une suite.
On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+u_n} \iff \ell = \sqrt{1+\ell}$
Résolvons cette équation : $\ell^2 - \ell - 1 = 0$
Alors $\Delta = 5$ et $\ell_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
Mais $u_0 \leq \ell$ et ici $\ell_1 \leq u_0 \leq \ell_2$ donc $\ell_2 = \ell$

Exercice 1 :

ⓐ $a_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n^3-2} = \dfrac{n^2}{n^3}\left(\dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 \quad - 2/n^3}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n^3}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

Donc grâce aux propriétés algébriques des limites de suites (il est bon de savoir les énoncés !) on a :

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n^3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3n} = 0$

ⓑ $b_n := \dfrac{3n+1+2n^2}{6n^2-2} = \dfrac{n^2}{n^2}\left(\dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n^2}\right) = \dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n^2}$

Pour les mêmes raisons on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$

ⓒ $c_n := \dfrac{3n+1+2n^2}{6n-2} = \dfrac{n^2}{n}\left(\dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n}\right) = n\left(\dfrac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n}\right)$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{1}{3} = \infty$

ⓓ $d_n := \dfrac{2(-1)^n n^2 + 3n+1}{6n^2-2} = (-1)^n\dfrac{n^2}{n^2}\left(\dfrac{2 + \frac{(-1)^n 3}{n} + \frac{(-1)^n}{n}}{6 - 2/n^2}\right) = (-1)^n\left(\dfrac{2 + \frac{(-1)^n 3}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}}{6 - 2/n^2}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-2}{n}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3}$ (par propriétés algébriques des limites de suites)

Or de $(-1)^n\dfrac{1}{3}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers $1/3$ et une sous suite qui converge vers $-1/3$. Ce qui montre que d_n n'est pas une suite convergente (par unicité de sa limite)

Exercice 3 :

ⓐ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

ⓑ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-5n+6n^2}{6-5n+3n^2} = 2$

ⓒ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+7n^2+4}}{5n-3} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$

ⓓ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \infty$

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(3n) + 2\sin(5n)}{n} = 0$

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-7}{3n+2} = 1/3$

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n\sqrt{n}-7}{3n+2} = \frac{1}{3}$

(j) Ne converge pas, utiliser le même principe que l'exercice précédent.

Exercice 4 :

Soit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on veut étudier $w_n = u_n v_n$

(a) $(w_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Posons $u_n = \frac{1}{n^2}$ $v_n = n$ on a alors $w_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(b) $(w_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Posons $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ $v_n = n^{10}$ on a alors $w_n = n^{(10-\frac{1}{3})} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

(c) $(w_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a > 0$ quelconque. Posons $u_n = \frac{40a}{n^{1/10}}$ $v_n = \frac{n^{1/10}+50}{40}$

On a alors $w_n = \frac{a n^{1/10} + a50}{n^{1/10}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

(d) (w_n) n'a pas de limite. On pose $u_n = \frac{\cos n\pi}{10n}$ et $v_n = n$

Ainsi $w_n = \frac{\cos n\pi}{10}$ qui n'a pas de limite.

Exercice 7 :

(a) La fonction puissance n est croissante : $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a > 1$

Donc $a = (a^{1/n})^n > 1 = 1^n$; $a^{1/n}$ étant l'unique réel défini comme $(a^{1/n})^n = a$ on a par croissance de la fonction puissance $a^{1/n} \geq 1$

(b) On pose $h_n = a^{1/n} - 1$. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n}$

$$(1+h_n)^n = (1+a^{1/n}-1)^n = (a^{1/n})^n \underset{\text{Inégalité de Bernoulli}}{\geq} 1 + n(a^{1/n}-1) = 1 + nh_n \geq 0$$

$1 + nh_n \geq 0$ car $a^{1/n} \geq 1$ si $a > 1$

Donc $a - 1 \geq nh_n \geq 0$ et $\frac{a-1}{n} \geq h_n \geq 0$ ceci $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Ainsi grâce au théorème des gendarmes, comme $0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et au fait que $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$ on conclut que $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} - 1 = 0$ donc par algèbre des limites,

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

(d) Ici on suppose que $a \in]0,1[$ donc il existe $b \in]1, \infty[$ tel que $a = \dfrac{1}{b}$ et $a^{1/n} = \left(\dfrac{1}{b}\right)^{1/n} = \dfrac{1}{b^{1/n}}$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n} = 1$ et par algèbre des limites $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

Exercice 8 :

(a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq M$
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|v_n| < \varepsilon$
Donc $|u_n v_n| \leq M |v_n|$ car u_n est bornée
Et $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n v_n| \leq M|v_n| < M\varepsilon$ $\forall n > N$
Donc $(u_n v_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
Attention ce n'est pas vrai si la limite de v_n est $l \neq 0$, il serait bon que vous trouviez un contre-exemple.

(b) $u_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n \longrightarrow +\infty$

$\forall M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ $M < u_n$
Donc $\forall M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ $M < u_n < v_n$
La suite (v_n) tend alors bien vers $+\infty$

(c) Si $(u_n) \longrightarrow +\infty$, $a > 0$, alors $(a u_n) \longrightarrow +\infty$

$\forall M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ $M < u_n$ donc $aM < a u_n$
et il suffit alors de poser $M' = aM$ et de réécrire la définition

(d) $(u_n) \longrightarrow l$, $l > 0$, $(v_n) \longrightarrow +\infty$ alors $(u_n v_n) \longrightarrow \infty$
$|u_n v_n| = |u_n v_n - v_n l + v_n l| = |v_n(u_n - l) + v_n l| = |v_n|\,|(u_n - l) + l|$
$\geq |v_n|\,\big||u_n - l| - l\big|$

Mais $l > 0$ et la suite u_n converge vers l, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée
donc $\big||l - u_n| - l\big| > \big||l| - |M| - l\big| = |M|$ pour $|M| > |u_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$
et $|u_n v_n| \geq |v_n|\,|M|$
Ainsi $\forall M' = \dfrac{m}{|M|} > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ $|u_n v_n| \geq M' > 0$

e) Si (u_n) est bornée et $(v_n) \to \infty$ alors $(u_n + v_n) \to +\infty$

$|u_n + v_n| = |u_n + u_n - u_n + v_n| \geq ||v_n - u_n| - 2|u_n||$

Mais $|u_n| < M$ car la suite (u_n) est bornée donc
$|u_n + v_n| > ||v_n - u_n| - 2M| > ||v_n| - 3M|$

De plus la suite $(v_n) \to \infty$ donc $\forall M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que
$\forall n > N$ on a $M < |v_n|$. En d'autres termes ici $\forall M' > 3M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$
tel que $\forall n > N$ on a $|u_n + v_n| > M'$ donc $(u_n + v_n) \to +\infty$