MAT 1013 : Feuille d'exercices 4
Limites de suites, comparaisons et opérations

Exercice 10 :

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

① $u_0 = 1$ $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $u_2 = \sqrt{1+u_1} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$
$u_3 = \sqrt{1+u_2} \approx 1,598$ $u_4 = \sqrt{1+u_3} \approx 1,6161$ $u_5 = \sqrt{1+u_4} \approx 1,6174$

② On va montrer que $u_{n+1} \geq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_1 \geq u_0$ (cas de base)
Etape de récurrence : On suppose pour $n \in \mathbb{N}$ fixé que $u_{n+1} \geq u_n$
on va alors montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
$u_{n+2} = \sqrt{1+u_{n+1}} \geq \sqrt{1+u_n}$ par hypothèse de récurrence $u_{n+1} \geq u_n$ et croissance de la fonction racine.
Or $\sqrt{1+u_n} = u_{n+1}$ par définition donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
Le principe de récurrence est donc vérifié pour la relation $u_{n+1} \geq u_n$ qui est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

③ On va montrer que $u_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on va le faire par récurrence.
Cas de base $n=0$, $u_0 = 1 \leq 2$
Hérédité : On suppose pour n fixé entier naturel que $u_n \leq 2$
Montrons qu'alors $u_{n+1} \leq 2$: $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$ par hypothèse de récurrence et croissance de $\sqrt{\cdot}$.
Donc par principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq 2$.

④ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et bornée dans $\mathbb{R}$ donc d'après un théorème très important de notre cours, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

⑤ Posons $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ qui existe par ④ et qui est donc unique par unicité de la limite d'une suite.
On a donc $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+u_n} \iff \ell = \sqrt{1+\ell}$
Résolvons cette équation : $\ell^2 - \ell - 1 = 0$
Alors $\Delta = 5$ et $\ell_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Mais $u_0 \leq \ell$ et ici $\ell_1 \leq u_0 \leq \ell_2$ donc $\ell_2 = \ell$

Exercice 1 :

ⓐ $a_n = \frac{3n+1+2n^2}{6n^3-2} = \frac{n^2}{n^3}\left(\frac{3/n + 1/n^2 + 2}{6 - 2/n^3}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{3/n+1/n^2+2}{6-2/n^3}\right)$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

Donc grâce aux propriétés algébriques des limites de suites (il est bon de savoir les énoncés !) on a :

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3/n+1/n^2+2}{6-2/n^3}\right) = \frac{1}{3}$

Donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = 0$

ⓑ $b_n := \frac{3n+1+2n^2}{6n^2-2} = \frac{n^2}{n^2}\left(\frac{3/n+1/n^2+2}{6-2/n^2}\right) = \frac{3/n+1/n^2+2}{6-2/n^2}$

Pour les mêmes raisons on a alors $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$

ⓒ $c_n := \frac{3n+1+2n^2}{6n-2} = \frac{n^2}{n}\left(\frac{3/n+1/n^2+2}{6-2/n}\right) = n\left(\frac{3/n+1/n^2+2}{6-2/n}\right)$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{3} = \infty$

ⓓ $d_n := \frac{2(-1)^n n^2 + 3n+1}{6n^2-2} = (-1)^n\frac{n^2}{n^2}\left(\frac{2+\frac{(-1)^n 3}{n}+\frac{(-1)^n}{n}}{6-2/n^2}\right) = (-1)^n\left(\frac{2+\frac{(-1)^n 3}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}}{6-2/n^2}\right)$

Or $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n 3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{n}\right) = 0$

Donc $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{3}$ (par propriétés algébriques des limites de suites)

Or de $(-1)^n\frac{1}{3}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers $1/3$ et une sous suite qui converge vers $-1/3$. Ce qui montre que d_n n'est pas une suite convergente (par unicité de sa limite)

Exercice 3 :

ⓐ $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

ⓑ $\lim_{n\to\infty}\frac{3-5n+6n^2}{6-5n+3n^2} = 2$

ⓒ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+7n^2+4}}{5n-3} = \frac{\sqrt{7}}{5}$

ⓓ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$

(e) $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \infty$

(f) $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{n \to \infty} \frac{\cos(3n) + 2\sin(5n)}{n} = 0$

(h) $\lim_{n \to \infty} \frac{n + \sqrt{n} - 7}{3n+2} = 1/3$

(i) $\lim_{n \to \infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n} - 7}{3n+2} = \frac{1}{3}$

(j) Ne converge pas, utiliser le même principe que l'exercice précédent.

Exercice 4 :

Soit $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$, on veut étudier $w_n = u_n v_n$

(a) $(w_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Posons $u_n = \frac{1}{n^2}$ $v_n = n$ on a alors $w_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

(b) $(w_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Posons $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ $v_n = n^{10}$ on a alors $w_n = n^{(10-\frac{1}{3})} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

(c) $(w_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ $a > 0$ quelconque. Posons $u_n = \frac{40a}{n^{1/10}}$ $v_n = \frac{n^{1/10} + 50}{40}$

On a alors $w_n = \frac{a n^{1/10} + a50}{n^{1/10}} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

(d) (w_n) n'a pas de limite. On pose $u_n = \frac{\cos n\pi}{10n}$ et $v_n = n$

Ainsi $w_n = \frac{\cos n\pi}{10}$ qui n'a pas de limite.