# MAT1013 : Feuille d'exercices 11

## Exercice 2

ⓐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^5 + 2x + 1$

$f$ est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ on a alors $f'(x) = 4x^4 + 2$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f$ est strictement croissante. De plus $f$ est un polynome de degré impair donc surjective d'après un de nos précédents exercice donc $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

ⓑ Tout d'abord $g$ est continue par le théorème de la fonction réciproque. Ensuite par la proposition 27.7 de Auclin-Debanné comme $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ on sait que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $g'(f(x)) \times f'(x) = 1$ et $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ donc $g$ est dérivable.

ⓒ On calcule facilement : $g(-2) = -1$

$g(1) = 0$

$g(4) = 1$

Ainsi $g'(-2) = g'(f(-1)) = \dfrac{1}{f'(-1)} = 1/6$

$g'(1) = g'(f(0)) = 1/f'(0) = 1/2$

$g'(4) = 1/6$

## Exercice 3

ⓐ On sait par le théorème des accroissements finis que $\forall x, y \in I$ $\exists \alpha$ entre $x$ et $y$ tel que $|f(x) - f(y)| = |f'(\alpha)(x-y)|$
Or par hypothèse $f'$ est bornée sur $I$ donc il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I$ $|f'(x)| \leq k$.
Ainsi $\exists k \in \mathbb{R}_+$, $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

(b) Si $I$ est un segment, $I$ est fermé borné donc si $f$ est dérivable sur $I$ de dérivée continue, $f'$ sera bornée sur $I$ par un théorème du notre cours et on vérifie alors les hypothèses précédentes.

## Exercice 4

(a) On a $f$ continue et dérivable sur $I$ et $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$
Donc d'après le théorème de Rolle $\exists\ c \in ]a_1, a_2[$ et $d \in ]a_2, a_3[$ tel que $f'(c) = f'(d) = 0$. Ainsi $f$ étant 2 fois dérivable on peut appliquer le théorème de Rolle à $f'$ et déduire qu'il existe $e \in ]c, d[$ tel que $f''(e) = 0$.

(b) $n \in \mathbb{N}^*$, $f$ $n$ fois dérivable sur $I$ et il existe $(n+1)$ points au moins où $f = 0$.
On va procéder par récurrence, on sait que c'est vrai pour $n = 1$.
On suppose le résultat vrai pour un $n$ fixé.
Donc pour $(n+1)$ on a comme hypothèse que $f$ est $(n+1)$ fois dérivable et possède au moins $(n+2)$ points où $f = 0$.
Ainsi $f^{(n)}$ est dérivable et possède au moins deux point où $f^{(n)} = 0$
donc on peut lui appliquer le théorème de Rolle et on sait qu'il existe au moins un point où $f^{(n+1)} = 0$

## Exercice 5

$f : [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0, \infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

(a) Tout d'abord si $f$ est constante la question est triviale
Donc supposons qu'il existe $a$ tel que $f(a) \neq 0$, posons alors $\varepsilon = |f(a)|$
On sait que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ donc $\exists M \geq a$ tel que $\forall x \geq M$, $|f(x)| < \varepsilon$
Considérons alors le segment $[0, M]$, c'est un segment donc $f$ y atteint un maximum et un minimum (car $f$ est continue). On note alors $B = \max_{x \in [0,M]} |f(x)|$ donc $\forall x \in [0, M]$, $|f(x)| \leq B$ et $\forall x \in ]M, \infty[$ $|f(x)| < \varepsilon = |f(a)| \leq B$ donc $f$ possède un max ou un min.

(b) Si $f$ possède un maximum ou un minimum alors par un des lemmes du théorème de Rolle on sait qu'il existe $c \in ]0, \infty[$ tel que $f'(c) = 0$

## Exercice 6

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,1[$ ; $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

On pose $g(x) = \left(f(x)\right)^2 - x$ alors $g$ est continue sur $[0,1]$ comme composée et somme de fonctions continues et dérivable sur $]0,1[$ pour les mêmes raisons.

$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 1$ et $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ donc en utilisant le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $c$ tel que $g'(c) = 0$ donc $2f(c)f'(c) = 1$ et $f(c)f'(c) = \frac{1}{2}$

## Exercice 8

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. $\exists\, m > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq m$

ⓐ La tangente en chaque point du graphe de $f$ est de pente $\geq m$

ⓑ Soit $x \geq 0$ alors d'après le théorème des accroissements finis $\exists\, c \in ]0, \infty[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c)\,x$ donc $f(x) - f(0) \geq mx$

Donc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \geq \lim\limits_{x \to \infty} mx + f(0) = +\infty$

De même pour $x \leq 0$, il existe $c \in ]-\infty, 0[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c)\,x$ donc $f(x) - f(0) \leq mx$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to -\infty} mx + f(0) = -\infty$

ⓒ $f$ est donc une fonction injective, continue avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc surjective c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

ⓓ On suppose de plus que $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \leq M$

On fixe $r \in \mathbb{R}$ et on définit $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{M}$ et $\alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$ $\alpha$ étant unique et $x_0 = r$

Supposons $r \geq \alpha$ alors par l'inégalité des A.F. on a $f(r) - f(\alpha) \leq M(r - \alpha)$ donc $\dfrac{f(r)}{M} \leq (r - \alpha)$ ainsi $x_1 = r - \dfrac{f(r)}{M} \geq r - (r - \alpha) = \alpha$

Fixons alors $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $x_n \geq \alpha$ on a alors grâce à l'IAF $f(x_n) - f(\alpha) \leq M(x_n - \alpha)$ et $\dfrac{f(x_n)}{M} \leq (x_n - \alpha)$ donc $x$

Donc $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{M} \geq x_n - (x_n - \alpha) = \alpha$ donc par principe de récurrence $x_n \geq \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f$ étant alors une fonction croissante on a $f(x_n) \geq f(\alpha) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ainsi $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{M} \leq 0$ car $M > 0$ donc $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée donc convergente.
Supposons maintenant $\alpha \geq r$ on définit alors une nouvelle suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = r$ et $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{M}$. Toujours par l'IAF

on a $f(\alpha) - f(r) \leq M(\alpha - r)$ donc $-\frac{f(r)}{M} \leq (\alpha - r)$ et $x_1 = r - \frac{f(r)}{M} \leq \alpha$

Supposons alors que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $y_n \leq r$ on a alors pour $(n+1)$ :
Par l'IAF $f(\alpha) - f(y_n) \leq M(\alpha - y_n)$ et $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{M} \leq \alpha$
Donc par principe de récurrence $y_n \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}$
De plus $f$ étant croissante et $y_n \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}$ alors $f(y_n) \leq f(\alpha) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
Donc $y_{n+1} - y_n = -\frac{f(y_n)}{M} \geq 0$ donc $y_{n+1} \geq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée donc convergente.

On a alors
$$\begin{aligned} |y_n - x_n| &\leq \left| y_n - x_n + \frac{f(x_{n+1}) - f(y_{n+1})}{M} \right| \quad \text{car } \frac{f(x_{n+1}) - f(y_{n+1})}{M} \geq 0 \\ &\leq |y_n - x_n + x_{n+1} - y_{n+1}| \quad \text{par l'IAF} \\ &\leq |y_n - y_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \end{aligned}$$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant deux suites convergentes $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$

tel que $\forall n > N \quad |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon/2$ et $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon/2$
Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N \quad |y_n - x_n| < \varepsilon$
Ainsi nos suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la définition de suites adjacentes avec $\alpha$ pour minorant de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et majorant de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc comme limite de ces deux suites.