MAT1013
Analyse I. (1)

Corrigé du Devoir n° 2.

Total points disponibles : 190 + bonus.
Note sur 170 (à ramener sur 100)

40 pts **Exercice 1.**

(a) On va montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

. Initialisation : on a $u_0 = b > 0$ par hypothèse.

. Transmission : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $u_n > 0$.

Alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} u_n$ car $a \geqslant 0$ et $u_n > 0$

donc $u_{n+1} > 0$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

(b) Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$
$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

donc $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$

et $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

Par conséquent, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right) \geqslant \sqrt{u_{n-1} \times \frac{a}{u_{n-1}}} = \sqrt{a}$$

(Car u_{n-1} et a sont positifs).

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{a - u_n^2}{u_n}$$

Or $u_n > 0$ d'après (a)

et $u_n \geqslant \sqrt{a}$ d'après (b), donc

$u_n^2 \geqslant a$. On obtient:

$\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) D'après (c), la suite (u_n), à partir du rang $n = 1$, est décroissante.

D'après (b), elle est minorée (par $\sqrt{a}$).

Donc par un théorème du cours, <u>elle converge vers une limite finie.</u>

Notons $l = \lim(u_n)$. On a: $l \geqslant \sqrt{a} > 0$.

On a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

donc en passant à la limite, on obtient: (en utilisant les opérations sur les limites):

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right).$$

d'où : $$2\ell^2 = \ell^2 + a$$

$$\ell^2 = a.$$

donc $\ell = \pm\sqrt{a}$.

Comme $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\ell \geq 0$.

Donc $\boxed{\ell = \sqrt{a}}$.

(e) Prenons par exemple $a = 2$,

et b un rationnel > 0 quelconque,

par exemple $b = 7$.

Alors, on voit facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q},$$

[on a $u_0 = b = 7 \in \mathbb{Q}$, et
en utilisant la formule $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$

on a : $u_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow u_{n+1} \in \mathbb{Q}$]

De plus, d'après (d), on a :

$$\lim (u_n) = \sqrt{a} = \sqrt{2}.$$

et on sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Donc (u_n) est une suite de rationnels qui a une limite irrationnelle.

50 pts **Exercice 2**

(a) Posons $\delta_n = v_n - u_n$.

On a :

$$\delta_{n+1} - \delta_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n$$
$$= (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}).$$

(v_n) est décroissante donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

(u_n) est croissante donc $u_n - u_{n+1} \leq 0$

d'où : $\delta_{n+1} - \delta_n \leq 0$

et (δ_n) est décroissante.

Par hypothèse, δ_n tend vers 0,

donc comme elle est décroissante, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_n \geqslant 0$,

i.e. : $\boxed{v_n \geqslant u_n}$.

(b) Par hypothèse, (u_n) est croissante ; de plus d'après (a),

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq v_0$ (car (v_n) décroissante)

Donc (u_n) est majorée (par v_0).

Par un théorème du cours, on en déduit que (u_n) converge vers une limite finie.

De même, (v_n) est décroissante, et minorée (par exemple par u_0), donc (v_n) a une limite finie.

(c) Si $\lim(u_n) = l$ et $\lim(v_n) = l'$,

alors $\lim(u_n - v_n) = l - l'$.

Or par hypothèse, $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Par unicité de la limite, on en déduit $\boxed{l = l'}$.

(u_n) est croissante et tend vers l, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l.$

(v_n) est décroissante et tend vers $l' = l$, donc

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq l.$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n}$

(d)

* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{n(n+1)^2} \right)$$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

et (v_n) est décroissante.

* $u_n - v_n = -\frac{1}{n\,n!}$ qui tend vers 0,

donc $\lim(u_n - v_n) = 0$.

On a vérifié les 3 points de la définition des suites adjacentes.

En particulier, $\lim(u_n) = \lim(v_n)$. On note leur limite commune e.

(e) $\lim(u_n) = e$, donc les termes de (u_n) donnent des approximations de plus en plus précises du nombre e. ~~D'après~~ L'erreur que l'on fait en approchant e par u_n vaut : $e - u_n$.

D'après (c), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq e - u_n \leq v_n - u_n$

Donc l'erreur est toujours majorée par $v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!}$.

Donc pour être sûr d'avoir une approximation de e à 10^{-2} près, il suffit de choisir ~~calculer~~ u_n avec n tel que $\frac{1}{n\,n!} \leq 10^{-2}$.

$n=5$ suffit: $\frac{1}{5.5!} = \frac{1}{600} \leq 10^{-2}$.

On a: $u_5 = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}$
$\simeq 2{,}71666\ldots$

Donc: $u_5 \leq e \leq u_5 + 10^{-2}$, i.e.

$2{,}716\ldots \leq e \leq 2{,}726\ldots$

Donc $e \simeq 2{,}72$ est une ~~valeur~~ approchée de e à 10^{-2} près.

(f) D'après (c), on a:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq e \leq v_n$.

En reprenant les calculs de (d), on voit facilement que (u_n) est en fait strictement croissante et (v_n) strictement décroissante. En particulier, elles ne sont pas "constantes à partir d'un certain rang", donc:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < e < v_n$.

$$0 < e-u_n < v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!}$$

et $0 < n n!(e-u_n) < 1$.

Posons $h_n = n n!(e-u_n)$.

Alors $h_n \in]0,1[$, et

$$e - u_n = \frac{h_n}{n n!} \quad \text{donc}$$

$$e = u_n + \frac{h_n}{n n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{h_n}{n n!}.$$

Unicité : si h_n' est un autre réel vérifiant l'égalité

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{h_n'}{n n!},$$

alors on a encore : $h_n' = n n!\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\right)$

$$= n n!(e - u_n)$$

$$= h_n.$$

(9) Supposons par l'absurde que $e \in \mathbb{Q}$ et posons

$$e = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*.$$

Alors :

$$h_n = n n!\left(\frac{p}{q} - u_n\right)$$

$$= n n!\frac{p}{q} - \left(n n! + \frac{n n!}{1!} + \frac{n n!}{2!} + \dots + \frac{n n!}{n!}\right)$$

Notons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{n n!}{k!} \in \mathbb{N}$.

et si n est assez grand, $\frac{n n! p}{q} \in \mathbb{N}$ aussi.

On obtient donc : $h_n \in \mathbb{N}$, pour n assez grand.

Or $h_n \in]0,1[$ d'après (f), d'où une contradiction.

Donc $\boxed{e \notin \mathbb{Q}}$.

50 pts **Exercice 3.**

(a) On suppose que (u_n) tend vers 0, et on veut montrer que (v_n) tend vers 0, i.e. on veut que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n > N \Rightarrow |v_n| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim(u_n) = 0$,

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\boxed{4}$)

(par définition de $\lim(u_n) = 0$ en prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$).

Alors, si $n > N$,

$$|u_{N+1} + \dots + u_n| \leq |u_{N+1}| + \dots + |u_n| \quad \text{par inégalité triangulaire}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< (n-N)\frac{\varepsilon}{2}$$

($\boxed{2}$ avec erreur dans l'énoncé)

Posons $S_N = u_1 + u_2 + \dots + u_N$ ($\boxed{6}$).

Si $n > N$,

$$|v_n| = \frac{|u_1 + u_2 + \dots + u_n|}{n}$$

$$\leq \frac{|u_1 + \dots + u_N| + |u_{N+1} + \dots + u_n|}{n}$$

$$< \frac{|S_N|}{n} + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{|S_N|}{n} + \left(1 - \frac{N}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{|S_N|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\boxed{5})$$

$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

si $n > N'$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2|S_N|}$ et $\frac{|S_N|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\boxed{1})$

On obtient donc :

si $n > \max(N, N')$,

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad (\boxed{3})$$

Donc $\boxed{\lim(v_n) = 0.}$

(b) Si (u_n) tend vers ℓ, posons $u'_n = u_n - \ell$

On a $\lim(u'_n) = 0$ et

$$\frac{u'_1 + \dots + u'_n}{n} = \frac{(u_1 - \ell) + \dots + (u_n - \ell)}{n}$$

$$= \frac{u_1 + \dots + u_n - n\ell}{n} = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} - \ell.$$

D'après (a),

$$\lim \frac{u_1' + \dots + u_n'}{n} = 0,$$

donc $\lim \left(\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} - l \right) = 0$

et $\boxed{\lim \left(\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \right) = l.}$

(c) Si (u_n) tend vers $+\infty$, on veut montrer que (v_n) tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que :

$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ n > N \Rightarrow v_n > M.$

Soit $M \in \mathbb{R}$.

(u_n) tend vers $+\infty$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \ n > N \Rightarrow u_n > 2M+2$

(La raison pour laquelle on prend $2M+2$ sera claire plus loin).

Alors : si $n > N$,

$$u_{N+1} + \dots + u_n > (n-N)(2M+2)$$

et $$\frac{u_{N+1} + \dots + u_n}{n} > \left(1 - \frac{N}{n}\right)(2M+2).$$

Si $n > 2N$, $\frac{N}{n} < \frac{1}{2}$ donc

$$\frac{u_{N+1} + \dots + u_n}{n} > \frac{1}{2}(2M+2) = M+1.$$

D'autre part, $\frac{u_1 + \dots + u_N}{n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$,

donc $\exists N' \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n > N' \Rightarrow \left| \frac{u_1 + \dots + u_N}{n} \right| < 1$

En particulier, $\frac{u_1 + \dots + u_N}{n} > -1$,

donc si $n > \max(N', 2N)$, on obtient :

$$v_n = \frac{u_1 + \dots + u_N}{n} + \frac{u_{N+1} + \dots + u_n}{n} > -1 + (M+1) = M.$$

donc $\boxed{\lim (v_n) = +\infty}$.

De même, on a : $\lim (u_n) = -\infty \Rightarrow \lim (v_n) = -\infty$

(remplacer u_n par $(-u_n)$ et v_n par $(-v_n)$ et utiliser le cas $+\infty$).

Donc on a bien démontré la propriété (P) dans tous les cas.

(d) Posons $u_n = x_{n+1} - x_n$.

On a : $\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n) = \frac{1}{n}(x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n+1} - x_n)$

$$= \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1).$$

$\lim (u_n) = \alpha$ par hypothèse, donc d'après la question (a), on obtient :

$$\lim_{n\infty} \left(\frac{x_{n+1} - x_1}{n} \right) = \alpha.$$

Or $\lim_{n\infty} \left(\frac{x_1}{n}\right) = 0$, donc $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{n} \right) = \alpha$

$$\frac{x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \quad \text{avec } \lim \frac{n}{n+1} = 1,$$

donc $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{n+1} \right) = \alpha$ aussi,

et $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{x_n}{n} \right) = \alpha$.

(e) Non, la réciproque n'est pas vraie.

Prenons par exemple $u_n = (-1)^n$.

Alors $v_n = \dfrac{-1+1-1+1 \ldots +(-1)^n}{n}$

donc $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{-1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

donc $\lim(v_n) = 0$.

Cependant, (u_n) ne tend pas vers 0.

(f). Supposons que (v_n) tend vers l.

(u_n) est croissante, donc soit elle tend vers une limite finie, soit vers $+\infty$. (théorème du cours)

Notons l' sa limite ($\in \mathbb{R}$ ou $+\infty$).

Alors d'après la propriété (P), ~~?~~ (v_n) tend aussi vers l'.

Par unicité de la limite, $l' = l$.

Donc (u_n) tend vers l.

50 pts **Exercice 4 :**

(a) (u_n) est bornée, donc pour tout n, l'ensemble $E_n = \{u_k, k \geq n\}$ est borné. Il a donc une borne inférieure et une borne supérieure, i.e., s_n et i_n existent.

$$E_{n+1} = \{u_k, k \geq n+1\} \subseteq E_n.$$

donc $\sup(E_{n+1}) \leq \sup(E_n)$.

i.e., $s_{n+1} \leq s_n$

et (s_n) est décroissante.

(u_n) est minorée. Soit a un minorant.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k \geq a$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sup\{u_k, k \geq n\} \geq a$ aussi.

Donc (s_n) est minorée.

D'après le théorème du cours, (s_n) est donc convergente.

(b) $s_n = \sup\left\{\frac{(-1)^k k}{k+1}, k \geq n\right\}$

Posons $E_n = \left\{\frac{(-1)^k k}{k+1}, k \geq n\right\}$.

Lorsque k est pair,

$\frac{(-1)^k k}{k+1} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \leq 1$ et tend vers 1 pour $k \to \infty$.

Lorsque k est impair, la valeur est négative donc aussi ≤ 1.

(15)

Donc $\sup E_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

s_n est donc ~~la~~ suite constante $= 1$,

donc $\boxed{\limsup (u_n) = 1.}$

De même, pour k impair,

$$\frac{(-1)^k k}{k+1} = \frac{-k}{k+1} = -1 + \frac{1}{k+1} \geq -1$$

et tend vers (-1) pour $k \to \infty$,
et pour k pair la valeur est positive donc ≥ -1,
donc $\inf E_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$i_n = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et $\boxed{\liminf u_n = -1}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \{u_k, k \geq n\}$

donc $u_n \leq \sup\{u_k, k \geq n\} = s_n$

et $u_n \geq \inf\{u_k, k \geq n\} = i_n$.

Si $\limsup u_n = \liminf u_n = l$, alors

on a $\quad i_n \leq u_n \leq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

avec $\lim(i_n) = \lim(s_n) = l$

donc par théorème des gendarmes,

$\boxed{\lim(u_n) = l}$.

(d) On suppose que $\lim(u_n) = l \in \mathbb{R}$.
On veut montrer que $\lim(s_n) = l$, i.e, que

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |s_n - l| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim(u_n) = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$n > N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, i.e. $l - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < l + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n > N$. On a : $S_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\}$

donc par définition de la borne supérieure, il existe

$k \geq n$ tel que : $S_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_k$

Donc $s_n < u_k + \frac{\varepsilon}{2} < l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = l + \varepsilon$ (puisque $k \geq n > N$)

De plus, $s_n \geq u_n > l - \frac{\varepsilon}{2} > l - \varepsilon$

Donc pour tout $n \geq N$, $l - \varepsilon < s_n < l + \varepsilon$

i.e., $|s_n - l| < \varepsilon$.

D'où $\lim(s_n) = l$.

On montre de façon analogue, (en utilisant la caractérisation de la borne inférieure avec la notation ε), que

$\lim(i_n) = l$.

On a donc bien que : $\limsup(u_n) = \liminf(u_n) = l$.

(e) Si a est une valeur d'adhérence de (u_n), a est la limite d'une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{n_k} \leq S_{n_k} = \sup\{u_j,\ j \geq n_k\}.$$

Or $\lim\limits_{k\to\infty}(u_{n_k}) = a$, et $\lim\limits_{k\to\infty}(S_{n_k}) = \limsup(u_n)$, puisque (S_{n_k}) est une suite extraite de (S_n).

Donc par passage à la limite des inégalités larges, on obtient : $a \leq \limsup(u_n)$.

(f) Posons $l = \limsup(u_n)$. On doit construire une suite extraite (u_{n_k}) de (u_n), qui converge vers l.

. On va, construire par étapes, en utilisant la caractérisation de la borne supérieure, une suite extraite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $l - \frac{1}{k} < u_{n_k} \leq l$.

. $\lim(s_n) = l$ donc il existe N_1 tel que, si $n > N_1$,

$$s_n > l - \frac{1}{2}.$$

Soit $n > N_1$.

$s_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$ donc par caractérisation de la borne supérieure, il existe $n_1 \geq n$ tel que $u_{n_1} > s_n - \frac{1}{2}$.

Donc, $u_{n_1} > l - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = l - 1$.

. Il existe N_2 tel que : $n > N_2 \Rightarrow s_n > l - \frac{1}{4}$

Soit $n \geq \max(N_2, n_1)$. Il existe $n_2 \geq n$ tel que $u_{n_2} > s_n - \frac{1}{4}$,

donc $u_{n_2} > l - \frac{1}{2}$, et $n_2 \geq n > n_1$.

On itère la construction, de façon à avoir pour chaque k, un élément u_{n_k} de la suite, avec

. $n_k > n_{k-1}$

et . $u_{n_k} > l - \frac{1}{k}$.

Alors (u_{n_k}) est bien une suite extraite de (u_n).

De plus, on a (question (c)) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n_k} \leq S_{n_k} \leq l.$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad l - \frac{1}{k} < u_{n_k} \leq l$

donc par théorème des gendarmes,

$$\lim_{k \to \infty} (u_{n_k}) = l.$$