MAT 1013 (Analyse 1)

Hiver 2013

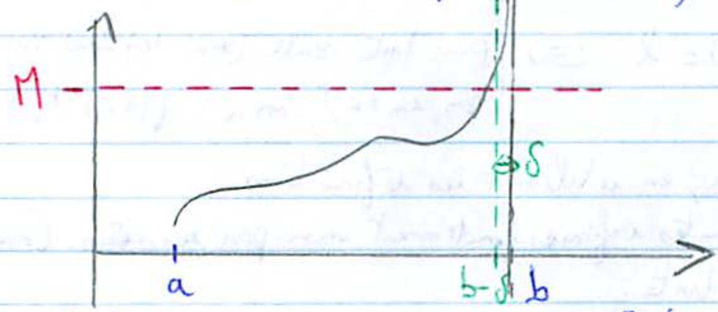
Quelques compléments de définition sur les limites.

* Limites infinies :

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$.

On dit que $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a,b[,\ b-\delta < x < b \Rightarrow f(x) > M$$



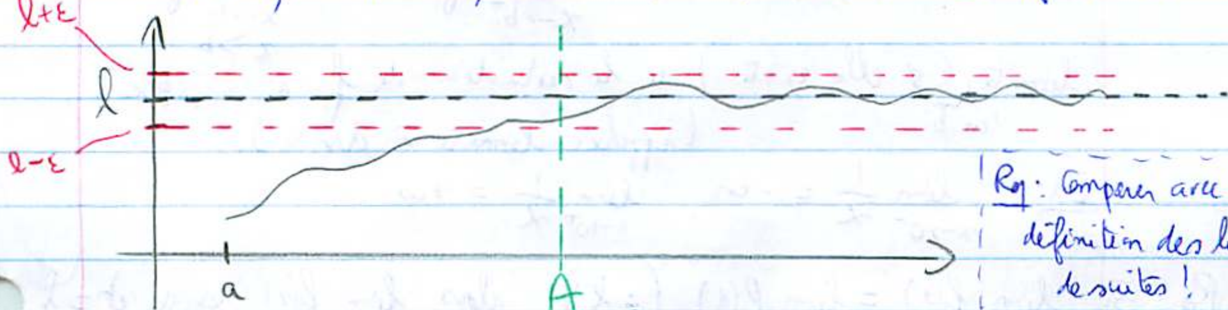
(asymptote verticale d'équation $x = b$)

Définition analogue pour $-\infty$. (l'écrire !)

* Limites en l'infini.

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a, +\infty[,\ x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$



Rq : Comparer avec la définition des limites de suites !

(asymptote horizontale d'équation $y = l$.

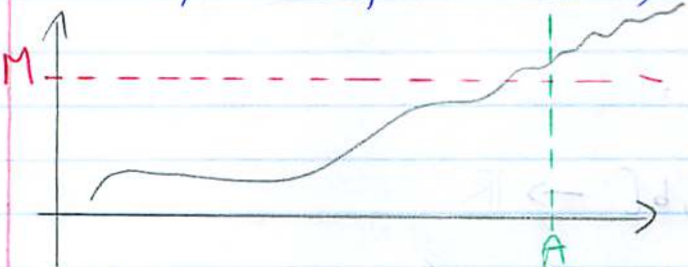
Exo : écrire l'analogue pour $-\infty$

On peut mélanger les 2 notions :

* Limite infinie en l'infini :

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, +\infty[, \ x > A \Rightarrow f(x) > M.$



Prop. On a la caractérisation séquentielle de la limite :

soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$,
soit $l \in \mathbb{R}$ ou $l = +\infty$ ou $l = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff$ pour toute suite (x_n) tendant vers a (et t.q. $\forall n, x_n \neq a$), on a : $f(x_n)$ tend vers l.

exo : le montrer, en utilisant les définitions.

Prop : Les opérations sur les limites infinies fonctionnent comme pour les suites. (mêmes formes indéterminées)

* Limites à gauche et à droite :

Lorsque f est définie sur $[a, b[$ et sur $]b, c]$ (pas forcément en b), on définit $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ (ou $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$) comme la limite en b de la restriction de f à $[a, b[$ (si elle existe !)

Elle s'appelle "limite à gauche de b".

De même, on note $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x)$ la limite en b (si elle existe) de la restriction de f à $]b, c]$.
(appelée limite à droite).

Ex : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Rq : Si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ $(= l)$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et $= l$.

Si de plus $f(b)$ est défini et $f(b) = l$, alors f est continue en b.