MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES I

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Si* a, b *sont des rationnels positifs, alors montrez* $a > b$ *implique* $a^2 > b^2$. *Généralisez à* $a^n > b^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Problème 2. *Si on a* $0 < a < b$ *alors démontrez les inégalités*

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Problème 3. *Montrez par induction que*

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Problème 4. *Un étudiant se propose de démontrer que tous les êtres humains font partie de la même famille en utilisant le Principe d'induction mathématique de la façon suivante :*

Pour un être humain, il provient effectivement d'une famille, la sienne. Si l'on suppose que tout ensemble de k *être humains proviennent forcément de la même famille, montrons alors que* $k+1$ *êtres humains font partie de la même famille : prenons ces* $k+1$ *êtres humains et retirons une personne du groupe. Il reste alors* k *êtres humains, dont on sait par hypothèse d'induction qu'ils sont de la même famille. En remettant la personne dans le groupe, on peut en retirer une autre et ainsi obtenir un autre ensemble de* k *êtres humains qui auront tous la même famille, encore en vertu de l'hypothèse d'induction. Comme on peut faire ceci pour chacun des individus dans le groupe, on en déduit que tout groupe de* $k+1$ *êtres humains sont de la même famille. Par le Principe d'induction mathématique, on en déduit que tous les êtres humains sont de la même famille.*

Expliquez pourquoi le raisonnement de l'étudiant ne tient pas.

Problème 5. *Démontrez par récurrence la formule du binôme de Newton :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Problème 6. *Montrez que :*

(1) $\sqrt{3}$ *n'est pas rationnel.*

(2) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ *n'est pas rationnel.*

(3) *Si* $r \in \mathbb{Q}$ *et* x *irrationnel, alors* $r + x$ *et* rx *sont irrationnels.*

Problème 7. *Prouvez que si* $x \in \mathbb{Q}$ *est non-négatif et tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait* $x < \frac{1}{n}$*, alors* $x = 0$*. En déduire que*

$$\inf\{\frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES II

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Montrez qu'il existe toujours une infinité de rationnels entre deux réels* $a < b$.

Problème 2. *Si* x, y *et* z *sont des réels tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait*

$$x \leq y \leq x + \frac{z}{n},$$

montrez alors que l'on doit avoir $x = y$.

Problème 3. *Trouvez le suprémum et infimum dans* $\mathbb{R}$ *(s'ils existent!) des ensembles suivants. Dans chaque cas déterminez si l'ensemble possède un maximum ou un minimum.*

(1) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{n} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}\}$

(3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$

(4) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est une nombre fixé.*

Problème 4. *Démontrez qu'étant donné* $z \in \mathbb{R}$ *quelconque, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \leq z < n + 1.$$

L'entier n *ainsi contruit est appelé partie entière de* z*, noté* $[z]$.

Problème 5. *Soit* A *une ensemble non-vide et borné supérieurement dans* $\mathbb{R}$*. Montrez que pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a*

(1) $\sup\{\alpha x \mid x \in A\} = r \sup A$ *si* $\alpha \geq 0$*. Que se passe-t-il si* $\alpha < 0$ *?*

(2) $\sup\{x + \alpha \mid x \in A\} = \alpha + \sup A$.

Problème 6. *Soient* A, B *sous-ensembles non-vides de* $\mathbb{R}$*. On définit*

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b \textit{ pour } a \in A \textit{ et } b \in B\}.$$

Si A *et* B *sont bornés dans* $\mathbb{R}$*, est-ce que* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ *? Justifiez votre réponse.*
Si A *et* B *sont bornés dans* $\mathbb{R}$*, montrez que* $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$*. Est-ce que l'on a toujours* $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$ *?*

Problème 7. *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *un ensemble borné et non-vide. Montrez que* $\alpha = \sup E$ *si et seulement si le nombre réel* α *satisfait :*

(1) α *est majorant de* E

(2) $\forall \epsilon > 0$ *il existe au moins un* $x \in E$ *tel que* $x > \alpha - \epsilon$.

Ceci donne une autre interprétation, souvent utile, de la notion de suprémum d'un ensemble.

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES III

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Si* $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \alpha$ *et* $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = \beta$, *montrez que* $\lim_{n\to\infty}\{a_nb_n\} = \alpha\beta$.

Problème 2. *Démontrez les énoncés suivants :*

(1) *Si* $\{a_n\} \to \alpha$ *et* $\{b_n\} \to +\infty$, *alors* $\{a_n + b_n\} \to +\infty$.

(2) *Si* $\{a_n\}$ *est bornée et que* $\{b_n\} \to 0$, *alors* $\{a_nb_n\} \to 0$.

Problème 3. *Supposons que* $0 < a_1 < b_1$ *sont des nombres réels et posons par récurrence*

$$b_{n+1} = \frac{a_1 + b_n}{2}.$$

Montrez que la suite $\{b_n\}$ *converge.*

Problème 4. *Trouvez la limite des suites suivantes :*

(1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(2) $\frac{n^2}{2^n}$

(3) $\frac{n^n}{n!}$

(4) $\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

Problème 5. *Soit* $\{a_n\}$ *une suite convergent vers un réel* α.

(1) *Si* $a_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$, *montrez que* $\alpha \leq M$.

(2) *Si* $a_n \geq M\ \forall n \in \mathbb{N}$, *montrez que* $\alpha \geq M$.

(3) *Si* $a_n < M\ \forall n \in \mathbb{N}$, *est-ce que l'on a forcément* $\alpha < M$ *?*

Problème 6. *On sait que toute suite de Cauchy converge dans* $\mathbb{R}$. *Un étudiant affirme que la suite* $\{x_n\} = \{\sqrt{n}\}$ *est de Cauchy car on peut écrire*

$$|x_{n+k} - x_n| = \sqrt{n+k} - \sqrt{n} = \frac{k}{\sqrt{n+k} - \sqrt{n}} < \frac{k}{2\sqrt{n}},$$

et comme, étant donné $\epsilon > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\frac{k}{2\sqrt{n}} < \epsilon \text{ si } n > N,$$

on en déduit que $\{x_n\}$ *est de Cauchy et donc* $\{x_n\}$ *converge. Où est l'erreur ?*

Problème 7. *On dit qu'une suite* $\{a_n\}$ *oscille si elle possède au moins deux points d'accumulation. Construisez une suite de réels* $\{a_n\}$ *qui oscille mais pour laquelle* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. *Est-il possible de modier votre exemple et obtenir une suite qui oscille pour laquelle on ait* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2}$ *?*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES IV

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Montrez que la suite* $\{\frac{n+2}{n}\}$ *est de Cauchy mais que* $\{(-1)^n\}$ *ne l'est pas.*

Problème 2. *Soit* $0 < a < 1$ *un nombre réel et* $\{a_n\}$ *une suite telle que*

$$|a_{n+1} - a_n| < a^n \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Montrez que $\{a_n\}$ *est suite de Cauchy. Peut-on en dire autant si l'on suppose plutôt que*

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n} \ (\forall n \in \mathbb{N})?$$

Problème 3. *Le but de cet exercice est de se familiariser avec la définition du nombre "e" et ses variantes :*

(1) *Montrez que* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$.
(2) *Montrez que* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$.
(3) *Montrez que* $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.
(4) *Montrez que* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = e^{2/3}$.

Problème 4. *Montrez en construisant des exemples appropriés que toutes les hypothèses dans le Théorème de Bolzano-Weierstrass sont essentielles.*

Problème 5. (plus difficile)
On dit qu'une suite $\{a_n\}$ *est monotone si la suite est décroissante ou si elle est croissante.*

(1) *Démontrez que toute suite* $\{a_n\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *possède une sous-suite monotone.*
(2) *Déduisez-en une nouvelle preuve du Théorème de Bolzano-Weierstrass*

Problème 6. *Le but de cet exercice est de construire une suite* $\{a_n\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que chaque valeur entière strictement positive dans* $\mathbb{R}$ *soit un point d'accumulation de* $\{a_n\}$.

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *montrez qu'il existe un unique* $k \in \mathbb{N}$ *tel que l'on ait*
$$\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leq n \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

(2) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique* $k \in \mathbb{N}$ *et un unique* $0 < l \leq k$ *tels que*
$$n = \frac{k(k-1)}{2} + l.$$

(3) *On construit la suite* $\{a_n\}$ *de la façon suivante : pour une valeur* $n \in \mathbb{N}$, *dont on sait par la partie précédente qu'elle peut s'écrire uniquement comme* $n = \frac{k(k-1)}{2} + l$, *on pose* $a_n = l$. *Démontrez que la suite* $\{a_n\}$ *ainsi construite est telle que toute valeur entière strictement positive* $p \in \mathbb{R}$ *est point d'accumulation de* $\{a_n\}$. *(Indice : essayez de comprendre géométriquement le comportement de cette suite* $\{a_n\}$*).*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES V

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Montrez que si les deux sous-suites* $\{a_{2n}\}$ *et* $\{a_{2n+1}\}$ *convergent vers la même limite* α*, alors la suite* $\{a_n\}$ *converge elle-même vers* α*. Est-ce que la réciproque est vraie ?*

Problème 2. *Soit* $\{a_n\}$ *une suite bornée telle que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = l \neq 1.$$

Montrez alors que $\{a_n\}$ *converge et calculez sa limite. Que se passe-t-il si l'on ne suppose pas que* $\{a_n\}$ *est bornée ?*

Problème 3. *Déterminez quels sont les points d'accumulation des suite suivantes :*

(1) $\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

(2) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Problème 4. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et définissons les translaté par* x *d'un ensemble* E *de la façon suivante :* $E_x = \{x + y \mid y \in E\}$*. Montrez alors que :*

(1) E *ouvert* $\iff$ E_x *ouvert.*

(2) E *fermé* $\iff$ E_x *fermé.*

Problème 5. *Montrez que tout ensemble borné dans* $\mathbb{R}$ *possède un point d'accumulation qui est maximal.*

Problème 6. *Montrez que si* $\mathcal{F}$ *est fermé et borné dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{F}$*.*

Problème 7. *Montrez que l'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble* $E \subseteq \mathbb{R}$ *est un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{R}$*.*

Problème 8. *Montrez que tout ensemble non-dénombrable dans* $\mathbb{R}$ *possède au moins un point d'accumulation.*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES VI

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Discutez de la convergence des séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dans les cas suivants :*

(1) $a_n = \frac{1}{n+5}$
(2) $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n+3)^n}$
(3) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
(4) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *est une constante.*
(5) $a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$

Problème 2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sont des séries convergentes à termes positifs, montrez que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{1/2}(b_n)^{1/2}$ *converge également.*

Problème 3. *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *une série à termes positifs et décroissants pour laquelle il existe une infinité de termes* $a_n > \frac{1}{n}$. *Montrez alors que la série diverge.*

Problème 4. *Calculez la valeur de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ *en trouvant des réels* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $\frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!}$ *et en vous rappellant que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Problème 5. *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *une série de nombres réels positifs qui est convergente. Montrez alors que pour tout entier* $p \in \mathbb{N}$ *on a que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ *converge également. Que se passe-t-il si l'on ne suppose pas que les* a_n *sont positifs ?*

Problème 6. *Pour* $E \subset R$ *on dit que* E *est de mesure nulle si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe une suite d'intervalles* $\{J_n\}$ *tels que* $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} longueur(J_n) < \epsilon$. *Montrez alors que si* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une collection dénombrable d'ensembles de mesure nulle alors* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *est aussi de mesure nulle.*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES VII

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Donnez une autre preuve que la série harmonique* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *ne converge pas en montrant que sa suite de sommes partielles ne satisfait pas la condition de Cauchy.*

Problème 2. *Montrez que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$ *converge si et seulement si la suite* $\{a_n\}$ *est convergente. Si l'on pose* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*, donnez la valeur de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$.

Problème 3. *Montrez que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Problème 4. *Si la série positive* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, est-ce que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ *converge forcément ? Justifiez votre affirmation.*

Problème 5. *Le but de cet exercice est de démontrer le critère de convergence d'Abel : Pour que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *soit convergente, il suffit qu'il existe deux suites* $\{\epsilon_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *telles que :*

(1) $a_n = \epsilon_n \; b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
(2) *Il existe un* $M > 0$ *tel que pour tous* $p > q$ *entiers naturels on ait* $|\sum_{n=q}^{p} b_n| \leq M$.
(3) *La série* $\sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n - \epsilon_{n-1}|$ *converge.*
(4) $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

On pose $B_{q,p} = \sum_{n=q}^{p} b_n$ *si bien que* $b_n = B_{n,p} - B_{n+1,p}$.

(1) *Montrez que* $|\sum_{n=q+1}^{p} a_n| = |\sum_{n=q+2}^{p} B_{n,p}(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) + B_{q+1,p} \; \epsilon_{q+1}|$.
(2) *Utilisez les hypothèses* $(2), (3)$ *et* (4) *ci-dessus pour en déduire que la suite des sommes partielles de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *est de Cauchy et donc la série converge.*

Problème 6. *Etudiez en fonction de $x \in \mathbb{R}$ la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{(n+1)!} \cdot x.$$

Tous les cas devront être couverts, incluant le cas douteux selon le Test de d'Alembert.

Problème 7. *Montrez que pour une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à termes positifs, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, mais que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série diverge. Que se passe-t-il si l'on enlève l'hypothèse $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifiez votre réponse.*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES VIII

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *Montrez que la limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est unique.*

Problème 2. *Faites une esquisse du graphe des fonctions suivantes puis étudiez rigoureusement quels sont leurs points de continuité et discontinuité :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{|x|-x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Problème 3. *Montrez rigoureusement que la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue en tout $x_0 > 0$.*

Problème 4. *Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un minimum local de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'il existe J_{x_0} intervalle ouvert de x_0 pour lequel on a $x \in J_{x_0} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. Montrer que si tout $x \in \mathbb{R}$ est minimum local de f et que f est continue, alors f est constante.*

Problème 5. *Montrez que pour tout polynôme $p(x)$ tel que $\lim_{x\to 0} p(x) = 0$ on a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{p(x)} = 0.$$

Problème 6. *Etant donné un ensemble fermé quelconque $F \subseteq R$ trouvez une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement F.*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES IX

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *On définit la fonction* partie entière *par* $f(x) = [x]$ *où* $[x]$ *désigne l'entier plus petit ou égal à* x *le plus proche de* x*. Montrez que la fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ainsi construite est continue en tout point de* $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$*.*

Problème 2. *Montrez que la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0*.*
Est-ce que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0 *? Justifiez bien votre réponse.*

Problème 3. *Soient* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *des fonctions continues.*

(1) *Montrez que les fonctions* $|f|, f+g$ *et* $f-g$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$*.*
(2) *Soient*

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$\min(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

Montrez que ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$*.*

Problème 4. *Montrez que si deux fonctions continues* f *et* g *sont égales sur* $\mathbb{Q}$*, alors elles sont identiques en tant que fonctions définies sur* $\mathbb{R}$*.*

Problème 5. *On dit qu'une fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est përiodique s'il existe un réel* T *tel que* $f(x+T) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Montrez qu'une fonction périodique pour laquelle il existe un* $l \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ *est forcément continue.*

Problème 6. *On dit qu'une fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* k*-Lipschitz si elle satisfait*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^k$$

pour une certaine constante réelle C*. Montrez que que si* $k > 0$*, alors toute fonction* k*-Lipschitz est continue.*

MAT1013 : TRAVAUX PRATIQUES X

OLIVIER COLLIN

Problème 1. *On dit que* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est k-Lipschitz si elle satisfait*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^k,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, *où* C *est une constante. Lorsque* $k = 1$ *on dit tout simplement que* f *est fonction de Lipschitz.*

(1) *Montrez que que si* $k > 0$ *alors toute fonction k-Lipschitz est continue.*

(2) **(Théorème du point fixe de Banach dans $\mathbb{R}$)** *Montrez que si* f *est fonction de Lipschitz avec* $0 < C < 1$, *alors* f *possède un point fixe dans* $\mathbb{R}$.

Problème 2. *Montrez que la fonction* $f(x) = \sqrt{x}$ *est uniformément continue sur tout* $\mathbb{R}$. *Montrez que* $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *n'est pas uniformément continue sur* $(0, 1)$. *Est-ce que* $h(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *?*

Problème 3. *Soit* f *une fonction telle que* $|f(x)| \leq x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Montrez que* f *est dérivable en* $0 \in \mathbb{R}$.

Problème 4. *Une fonction est dite impaire si* $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Montrez que si* f *est dérivable et impaire, alors* $f'(-x) = f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Problème 5. *Soient* $f(x)$ *et* $g(x)$ *deux polynômes tels que*

$$f(x) = g(x) + o(x^k)$$

lorsque $x \to +\infty$. *Montrez que* f *et* g *ont les mêmes coefficients de degré* $k, k+1, k+2, \ldots$.

Problème 6. *Soit* f *une fonction dérivable en* $a \in \mathbb{R}$. *Calculez*

$$\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}.$$

Problème 7. *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en* 0

(1) *Montrez que* $f'(0) = \lim_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n}) - f(0))$.

(2) *En vous basant sur un exemple, montrex que l'existence de* $\lim_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n}) - f(0))$ *ne permet pas de conclure que* f *est dérivable en* 0 *en général.*

Problème 8. *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur tout* $\mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on ait*

$$0 < m \leq f'(x) \leq M < +\infty.$$

(1) *Montrez que* f *est surjective.*

(2) *Montrez que la suite* $\{x_n\}$ *définie par*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M} \text{ et } x_0 = 0$$

converge vers l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.