MAT 1013 : Exercices

19 janvier

1. Soit b_0 un nombre réel plus grand que $3/2$. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que
$$\frac{3}{2} < \frac{3n+4}{2n} < b_0.$$

2. Soit x un nombre réel positif satisfaisant l'inégalité $0 \leq x < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x = 0$.

3. Trouver la plus petite borne supérieure et la plus grande borne inférieure, si elles existent, de l'ensemble suivant. Justifier sa réponse.
$$\left\{\frac{4n}{5n+3} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

4. Trouver la plus petite borne supérieure et la plus grande borne inférieure, si elles existent, de l'ensemble suivant. Justifier sa réponse.
$$\left\{\frac{5n+1}{2n} \mid \in \mathbb{N}\right\}$$

5. Trouver la plus petite borne supérieure et la plus grande borne inférieure, si elles existent, de l'ensemble suivant. Justifier sa réponse.
$$\left\{\frac{(-1)^n 2n}{n+1} \mid \in \mathbb{N}\right\}$$

6. Montrer que si $\emptyset \neq F \subset E \subset \mathbb{R}$ sont deux ensembles bornés, alors $\inf(E) \leq \inf(F) \leq \sup(F) \leq \sup(E)$.

7. Soient E et F deux ensembles non vides tels que $x \in E$ et $y \in F$ impliquent $x \leq y$. Montrer que E est borné supérieurement, que F est borné inférieurement et que $\sup(E) \leq \inf(F)$.

8. Soient $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ et $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$ deux ensembles bornés supérieurement. Montrer que l'union $E \cup F$ l'est aussi et que $\sup(E \cup F) = \max\{\sup(E), \sup(F)\}$.

9. Soient $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ et $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$ deux ensembles bornés inférieurement. Montrer que l'union $E \cup F$ l'est aussi et que $\inf(E \cup F) = \min\{\inf(E), \inf(F)\}$.

10. Soit $x \geq -1$. Démontrer par récurrence que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Démontrer par récurrence que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

MAT 1013 : Exercices

26 janvier

1. Trouver un $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n > N$ on a

$$\left|\frac{n^2-2}{3n^2+4} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{826}.$$

2. Trouver un $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n > N$ on a

$$\left|\frac{3n^2+2n+10}{7n^2-5n+4} - \frac{3}{7}\right| < \frac{1}{1000}.$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ nous avons les inégalités

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4. Montrer que les suites ci-après convergent vers 0 en utilisant la notation $\epsilon - N(\epsilon)$.

(1) $\quad x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

(2) $\quad x_n = \log_n(2)$

(3) $\quad x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$

5. Montrer que la suite $x_n = \frac{5n+1}{2n}$ ne converge pas vers $\frac{3}{2}$.

6. Montrer que la suite $x_n = \sqrt[n]{1+n+n^2}$ converge vers 1.

7. Montrer que la suite $x_n = \sqrt{n+n^2} \, - \, n$ converge vers $1/2$.

8. Montrer que la suite $x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$ converge vers 2 en utilisant la notation $\epsilon - N(\epsilon)$.

9. Définissons les suites ci-après ($n \geq 2$) :

$$\begin{aligned}
a_n =& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n \\
b_n =& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n
\end{aligned}$$

Vérifier que $b_n - a_n = \frac{1}{n}$. Conclure que $b_n > a_n$.
Utiliser les inégalités

$$(4) \qquad \frac{1}{n+1} < \log{(n+1)} - \log n < \frac{1}{n}$$

afin de montrer que $b_{n+1} < b_n$ et $a_n < a_{n+1}$. La suite b_n est strictement décroissante et bornée inférieurement. La suite a_n est strictement croissante et bornée supérieurement. Nous verrons sous peu en classe que dans ces conditions les suites b_n et a_n convergent. Montrer qu'elles convergent vers la même valeur $C = 0,5772156649$.... Cette valeur est appelée la constante d'Euler.
La démonstration des inégalités en (4) est basée sur le fait que si $n < x < n+1$ alors $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$, d'où

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{n}.$$

MAT 1013 : Exercices

2 février

1. Montrer que les suites ci-après convergent en utilisant la notation $\epsilon - N(\epsilon)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3\cdot 10^n}{5+2\cdot 10^n} = \frac{3}{2} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{-n^2+4n-2} = -3 \tag{3}$$

2. Montrer que la suite $x_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ est croissante et majorée. Trouver la limite de cette suite.

3. Soit $x_1 = 1$ et $x_n = 3 + \sqrt{x_{n-1}}, n \geq 2$. Montrer (par récurrence) que la suite x_n est majorée et qu'elle est croissante. Trouver la limite de cette suite.

4. Soit $x_1 = 1$ et $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, n \geq 2$. Montrer (par récurrence) que la suite x_n est majorée et qu'elle est croissante. Trouver la limite de cette suite.

5. Utiliser les propriétés des limites afin d'évaluer les limites suivantes.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-5n+3n^3}{-6+7n^2+2n^3} \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7} \tag{5}$$

6 . Définissons la suite ci-après ($n \geq 1$) :

$$x_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Vérifier que $0 < x_n < 1$ pour tout n. Déterminer si la suite est croissante ou décroissante. Conclure que la limite existe.

7. Soit $x_n = \frac{1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$, où $n \geq 1$ et k est un entier strictement positif fixe.
Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{k+1}.$$

Indication. Utilisez le fait que $(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$ est un polynôme en n de degré $k+1$ ayant comme coefficient dominant $1/(k+1)$.
Interprétation : x_n peut être vu comme une somme de Riemann et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k \, dx.$$

8. Utiliser le binôme de Newton afin de montrer l'inégalité

$$2^n = (1+1)^n > n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Puis montrer que $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$. Conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

9. Soit $\{x_n\}$ une suite qui converge vers a. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}.$$

Vous aurez besoin de la relation $(x-y) = (x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$.

MAT 1013 : Exercices

9 février

1. Trouver l'ensemble des points d'accumulation des ensembles suivants :
   1. $\{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$
   2. $\{(-1)^n \dfrac{n+1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$
   3. $([1, 2] \cup \{3\}) \cap \mathbb{Q}$
   4. $\{x \in \mathbb{Q} | 1 < x < 2\}$
   5. $]2, \infty[$
2. Trouver $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-1/n, 3 + 1/n[$.

3. Trouver $\bigcup_{n=1}^{\infty}]1/n, 3 - 1/n[$.

4. Les ensembles de l'exercice 1 sont-ils fermés ?

5. Montrer que tout nombre réel est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$.

6. Montrer que tout nombre réel est un point d'accumulation de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

7. La fermeture d'un ensemble E, notée $\overline{E}$, est $E \cup E'$, où E' désigne l'ensemble des points d'accumulation de E. Trouver la fermeture des ensembles de l'exercice 1.

8. Montrer que $\overline{E}$ est fermé, c'est-à-dire montrer que le complément de $\overline{E}$ est ouvert.

9. Soit $E = \{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup]2,\ 3[\cup]3,\ 4[\cup \{9/2\} \cup [5,\ 6] \cup (\mathbb{Q} \cap [7,\ 8])$. Trouver E', $\overline{E}$ et l'ensemble des points intérieurs de E.

MAT 1013 : Exercices

16 février

1. Pour chacun des ensembles E de cet exercice, trouver E', $\overline{E}$ et $int(E)$.
   1. $(\,]-\infty,-1] \cap \mathbb{Q}\,) \cup]-1,1[\cup \{1+1/n \,|\, n \geq 1\} \cup (\,]2,\sqrt{5}\,] \cap \mathbb{Q}\,)$.
   2. $(\mathbb{R} \setminus \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}\,) \cap [0,2]$.
   3. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(1/x) = 0\}$.

2. Trouver $\bigcup_{n=1}^{\infty}\,]n-1, n+2[$.

3. Trouver $\bigcup_{n=1}^{\infty}\,]1/(n+2), 1/n[$.

4. Trouver $\bigcap_{n=1}^{\infty}\,]2-1/n, 3+1/n]$.

5. Trouver $\bigcup_{n=1}^{\infty}\, [2-1/n, 3-1/n[$.

6. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{E}$ est le plus petit fermé contenant E. C'est-à-dire, montrer que si F est un fermé contenant E, alors $E \subset \overline{E} \subset F$.

7. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'intérieur de E, noté $int(E)$, est l'ensemble des points intérieurs de E. Montrer que $int(E)$ est un ouvert. Montrer que $int(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E. C'est-à-dire, montrer que si G est un ouvert contenu dans E, alors $G \subset int(E) \subset E$.

8. Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Montrer que $A' \subset B'$.

9. Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

10. Soient A et B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Trouver un exemple illustrant le fait que l'égalité $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas vérifiée en général.

11. Soient A et B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$. Montrer que $int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$. Trouver un exemple illustrant le fait que l'égalité $int(A) \cup int(B) = int(A \cup B)$ n'est pas vérifiée en général.

MAT 1013 : Exercices

16 mars

1. Basez-vous sur les démonstrations des points 3) et 4) de la proposition 2 afin de montrer que si f et g sont des fonctions continues définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors les fonctions $f+g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont continues dans D.

2. Soit f une fonction continue en x_0. Montrer que la fonction $|f|$ est continue en x_0. L'inverse est-il vrai ?

3. Soit f et g deux fonctions définies sur D. Posons $f \vee g(x) = \max(f(x), g(x))$ et $f \wedge g(x) = \min(f(x), g(x))$. Montrer que $f \vee g = \frac{1}{2}((f+g) + |f-g|)$ et $f \wedge g = \frac{1}{2}((f+g) - |f-g|)$. Montrer que si f et g sont continues, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ sont continues.

4. En vous basant sur les exemples vus en classe (et dans les TP) concernant la continuité des fonctions $x^{1/2}$ et $x^{1/3}$, montrer que la fonction racine n-ième est continue de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$. ($n \in \mathbb{N}$)

5. Soit f une fonction continue en x_0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que f^n est continue en x_0. Est-ce que la fonction $f^{1/n}$ est continue en x_0 ? Justifier sa réponse.

6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

7. Montrer qu'il existe un nombre $x \in]\pi/6, \pi/3[$ tel que $\cos(x) = \tan(x)$.

8. Soit $f(x) = x^6 - 6x$. Déterminer un intervalle de largeur $1/16$, contenu dans [1, 2] qui contient au moins un nombre c tel que $f(c) = 1$.

9. En utilisant la notation ϵ-δ, montrer que si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions $f \pm g$ et fg sont continues en x_0.

10. Montrer que si $m > 0$ est un nombre quelconque, alors il existe un $x \in]0, \pi/2[$ tel que $mx = \cos(x)$.

MAT 1013 : Exercices

23 mars

1. Soient $f(x) = x^2$, $\epsilon = 1/10$ et $a = 2$. Trouver δ tel que $f(V(a,\delta)) \subset V(f(a),\epsilon)$.

2. Soient $f(x) = \sin(x)$, $\epsilon = 1/5$ et $a = \pi/2$. Trouver δ tel que $f(V(a,\delta)) \subset V(f(a),\epsilon)$.

3. Soient $f(x) = \tan(x)$, $\epsilon = 1/10$ et $a = \pi/4$. Trouver δ tel que $f(V(a,\delta)) \subset V(f(a),\epsilon)$. Refaire l'exercice avec $a = 4\pi/9$.

4. Soient $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\epsilon = 1/10$ et $a = 1/2$. Trouver δ tel que $f(V(a,\delta)) \subset V(f(a),\epsilon)$. Refaire l'exercice avec $a = 5$.

5. Soient $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Soient $\epsilon = 1/10$ et $a = 8$. Trouver δ_1 et δ_2 tels que $f(V(a,\delta_2)) \subset V(f(a),\delta_1)$ et $g(V(f(a),\delta_1)) \subset V(g \circ f(a),\epsilon)$.

6. Montrer qu'il y a un point c entre 0 et 2 tel que $c^2 + \cos(\pi c) = 4$.

7. Soit $f(x) = x^3$. Utiliser la notation $\epsilon - \delta$ afin de montrer que f est continue en $x = a$. Indication : $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2)$. Majorer le terme $(x^2 + xa + a^2)$ autour de a. Généraliser avec $f(x) = x^n$.

8. Montrer que la fonction $f :]a,1[\to \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, définie par $f(x) = 1/x$ est uniformément continue sur $]a,1[$.

9. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

10. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(1/x)$. Montrer que f n'est pas uniformément continue dans $]0,1[$. Déterminer si $g(x) = \cos(1/x)$ est uniformément continue sur $]0,1[$.

11. Soit $f, g : D \to R$ deux fonctions uniformément continues dans D. Montrer que $f + g$ est uniformément continue dans D.

12. Donner un exemple de fonctions f et g uniformément continues telles que fg n'est pas uniformément continue.

13. Soit $f, g : D \to R$ deux fonctions uniformément continues et bornées. Montrer que fg est uniformément continue dans D.

14. Soit $f : A \to B$ et $f : B \to C$ des fonctions uniformément continues. Montrer que $g \circ f : A \to C$ est uniformément continue.

15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique. Montrer que f est uniformément continue.

MAT 1013 : Exercices

30 mars

1. Déterminer un nombre δ tel que

$$\left|\frac{3x-1}{x+2}-\frac{2}{3}\right| < 0,001$$

dès que $0 < |x-1| < \delta$.

2. Déterminer un nombre δ tel que

$$\left|\frac{x-1}{1+4x}+1\right| < 0,001$$

dès que $0 < |x| < \delta$.

3. Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}$, définie dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 3 est 7.

4. Soit $f(x) = \dfrac{|x|-x}{x}$, définie dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trouver $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

5. Soit f et g des fonctions définies dans D. Soit a un point d'accumulation de D. Supposons que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1.$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = L_2.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2.$$

Montrer que

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = L_1 L_2.$$

Montrer que si $L_2 \neq 0$, alors $g(x) \neq 0$ dans $V'(x, \delta) \bigcap D$ pour un certain δ. Montrer que si $L_2 \neq 0$ alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{L_1}{L_2}.$$

6. À l'aide de la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = L.$$

7. Soit $f, g : D \to R$ deux fonctions ayant D comme domaine commun et x_0 un point d'accumulation de D. Supposons que f est bornée dans un voisinage de x_0 et que g possède la limite 0 à x_0. Montrer que fg a une limite à x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

MAT 1013 : Exercices

7 avril

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pour tout x, y dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = cx$, où c est une constante.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour tout x, y dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = cx + a$, où c et a sont des constantes.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pour tout x, y dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = a^x$, où $a > 0$ est une constante.

4. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

pour tout $x > 0$, $y > 0$ dans $]0, \infty[$. Montrer que $f(x) = \log_a(x)$, où $a > 0$ est une constante.

5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable dans $]a, b[$. Montrer que si $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, alors f est injective.

6. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]a,b[$. Si $f'(x)$ est bornée sur $]a,b[$, montrer que f est uniformément continue sur $]a,b[$.

7. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = b$ et $f(b) = a$. Montrer qu'il existe des nombres x et y, $a < x < y < b$, tels que

$$\frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y)} = -2.$$

8. Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction telle que $f''(x)$ existe dans $]a,b[$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Si $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$, montrer que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

MAT 1013 : Devoir 1

À rendre le 10 février

Vous devez toujours justifier vos réponses.

1. En utilisant la notation $\epsilon - N(\epsilon)$, montrer que.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + \sin(n^2) - n + 6}{n^2 - n + 1} = 5.$$

2. Trouver la limite de la suite $\{\sqrt{n^4 + pn^2 + q} - n^2\}_{n\geq 1}$. On suppose que p et q sont des nombres positifs.

3. Soit $x_1 = 1$ et $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}, n \geq 2$. Montrer que la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est bornée et monotone. Montrer que la limite de cette suite est le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers a et soit $\{y_n\}_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers b. Supposons que $x_n \leq y_n$ pour tout n. Montrer que $a \leq b$.

5. Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite bornée. Montrer que la suite définie par $B_n = \sup\{x_k | k \geq n\}$ est décroissante et minorée. La suite $\{B_n\}_{n\geq 1}$ converge donc vers une valeur que nous notons

$$\limsup_{n\to\infty}\{x_n\}.$$

Cette valeur est appelée la limite supérieure de la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Montrer que la suite définie par $b_n = \inf\{x_k | k \geq n\}$ est croissante et majorée. La suite $\{b_n\}_{n\geq 1}$ converge donc vers une valeur que nous notons

$$\liminf_{n\to\infty}\{x_n\}.$$

Cette valeur est appelée la limite inférieure de la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Trouver la limite inférieure et la limite supérieure de la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ si

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{n+2}.$$

6. Soit $\{u_n\}$ une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |a| < 1.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

MAT 1013 : Devoir 2

À rendre **en classe** le 12 avril

Vous devez toujours justifier vos réponses. Vous ne pouvez utiliser de résultats autres que ceux présentés en classe ou lors de séances d'exercices. Chaque numéro vaut 20 points.

1. Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^2.$$

pour tout x et tout y dans $[a, b]$. Montrer que f est constante.

2. Soit $0 < a < b$. En utilisant le théorème de la moyenne , montrer les inégalités

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1.$$

Conclure que pour tout $x > 0$ nous avons

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Déduire ensuite que pour $m \geq n > 1$ nous avons

$$\ln\left(\frac{m+1}{n}\right) < \sum_{i=0}^{m-n} \frac{1}{n+i} < \ln\left(\frac{m}{n-1}\right)$$

3. Dans cet exercice, vous devez démontrer la proposition suivante.

Soit f une fonction continue sur $[0, \infty[$. Si f est uniformément continue sur $[a, \infty[$, où $a > 0$ est un nombre réel arbitraire, f est uniformément continue sur $[0, \infty[$.

Pour ce faire, vous devez ordonner les six énoncés ci-après et les justifier brièvement.

a) $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$ et donc pour tout x, y dans $[0, \infty[$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
b) f est uniformément continue sur $[0, a+1]$.
c) f est continue sur $[0, a+1]$.
d) $\exists \delta_1$ tel que $\forall x, y \in [a, \infty[$, $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
e) f est uniformément continue sur $[a, \infty[$.
f) $\exists \delta_2$ tel que $\forall x, y \in [0, a+1]$, $|x - y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, \infty[$. Déduire que f est uniformément continue sur $[0, \infty[$.

4. Montrez la proposition suivante :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$. Si $f'(a) < y_0 < f'(b)$ alors il existe un x_0 dans $]a, b[$ tel que $f'(x_0) = y_0$.

(Notez qu'il n'y a aucune hypothèse sur la continuité de la fonction dérivée $f'(x)$.)
Indications
Étape 1. Considérez le cas spécial $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe un point x_0 dans $]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.
Étape 2. Utilisez la fonction auxiliaire $g(t) = f(t) - y_0 t$ afin d'obtenir le résultat général à partir de l'étape 1.

5. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, \infty[$ et différentiable sur $]0, \infty[$. Supposons que $f(0) = 0$ et que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Montrer qu'il existe un $c \in\ ]0, \infty[$ tel que $f'(c) = 0$.