Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

Interrogation 4 - 18 décembre 2008.

Important : *La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Exercice 1. *Logique.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère l'assertion A : "f admet un minimum sur $\mathbb{R}$".

a) Ecrire l'assertion A avec des quantificateurs.

b) Ecrire l'assertion non(A) avec des quantificateurs.

Exercice 2. *Cours.*

Enoncer précisément le théorème de Rolle.

Exercice 3. *Développements limités I.*

On considère la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On définit alors la fonction Arcsin $:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ comme la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 6 en 0.

b) En déduire le développement limité de Arcsin à l'ordre 7 en 0.

Exercice 4. *Continuité et dérivabilité.*

On considère la fonction $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = -2$.

a) Montrer que f est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Que vaut $f'(0)$?

c) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. Est-ce que f' est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$?

Exercice 5. *Développements limités II.*

On définit les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement par les formules $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 de sh et ch.

b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de th.