Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

Corrigé de l'interrogation 3 - 3 décembre 2008.

Important : *La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Exercice 1. *Logique I.*

Donner un exemple convaincant (pris dans la vie courante ou en mathématiques) montrant que les énoncés

$$\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$$

et

$$\exists y,\ \forall x,\ P(x,y)$$

(où $P(x,y)$ est une propriété dépendant de x et y) n'ont pas le même sens.

On considère l'ensemble des personnes vivant sur terre et l'ensemble des jours de l'année. Pour un individu x et un jour y on considère la propriété $P(x,y)$: x est né le jour y. Alors la propriété $\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$ est vraie : en effet pour toute personne vivante il existe un jour qui est le jour de sa naissance. Par contre la propriété $\exists y,\ \forall x,\ P(x,y)$ est fausse. Elle signifie en effet que toutes les personnes vivantes sont nées le même jour, ce qui n'est bien entendu pas le cas.

Exercice 2. *Logique II.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère les deux assertions A : "la fonction f a un maximum" et B : "la fonction f est majorée".

a) Ecrire les assertions A et B avec des quantificateurs.

$A : \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(x_0)$
$B : \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$

b) Ecrire (avec des quantificateurs) la négation de l'assertion A.

$\text{non}(A) : \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > f(x_0)$

c) Est-ce que l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie pour toute fonction f ? Est-ce que l'assertion $B \Rightarrow A$ est vraie pour toute fonction f ? (Donner à chaque fois soit une démonstration soit un contre-exemple.)

L'implication $A \Rightarrow B$ est vraie pour toute fonction f. En effet si f a un maximum en x_0, pour tout x réel $f(x) \leq f(x_0)$ et donc f est majorée par $M = f(x_0)$.
L'implication $B \Rightarrow A$ n'est pas vraie en général : une fonction peut très bien être majorée sans atteindre sa borne supérieure. Ainsi si on considère pour f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = -e^x$, alors f est majorée par 0, c'est même la borne supérieure de $f(\mathbb{R})$ car $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ mais ce n'est pas un maximum car la fonction f ne s'annule jamais.

Exercice 3. *Ensembles et applications*

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset F$ une partie de F.

a) Montrer que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Soit $y \in f(f^{-1}(A))$. Montrons que $y \in A$.
Par définition $f(f^{-1}(A)) = \{f(x),\ x \in f^{-1}(A)\}$. Donc il existe $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. Par ailleurs, et encore par définition, $f^{-1}(A) = \{x \in E,\ f(x) \in A\}$. D'où $y = f(x) \in A$.

b) Montrer que, si f est surjective, $f(f^{-1}(A)) = A$.

On a déjà montré l'inclusion $f(f^{-1}(A)) \subset A$ à la question précédente. Il suffit donc de montrer l'inclusion $A \subset f(f^{-1}(A))$.

Soit donc $y \in A$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et en fait $x \in f^{-1}(A)$ car $f(x) \in A$ par hypothèse. D'où $y \in f(f^{-1}(A))$.

c) Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

D'après la question précédente, pour trouver un exemple où il n'y a pas égalité, il faut trouver une fonction f qui ne soit pas surjective. On prend $E = F = \{0,1\}$ et $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ avec $f(0) = f(1) = 0$. Pour $A = \{1\}$, $f^{-1}(A) = \emptyset$ et $f(f^{-1}(A)) = \emptyset$, l'inclusion $f(f^{-1}(A)) \subset A$ est donc stricte en ce cas.

Exercice 4. *Cours.*

Enoncer précisément le théorème des valeurs intermédiaires.

Soient $a < b$ des réels, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est *continue* sur le *segment* $[a,b]$. Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe $x \in [a,b]$, tel que $f(x) = y$.

Exercice 5. *Limites.*

On justifiera ses réponses par un calcul et/ou en utilisant des limites connues.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.

On a : $x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x}\ln x)$ (pour $x > 0$; notez qu'on va chercher la limite en 0^+, sinon cela n'a pas de sens). Or on sait (limite classique) que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$ ("les fonctions puissances l'emportent sur le logarithme"). D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = \exp(0) = 1$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^3+3x^2}$.

On a : $\sin(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, et $x^3+3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 3x^2$ (attention, c'est un équivalent en 0 et pas en $+\infty$!). D'où $\frac{\sin(x^2)}{x^3+3x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^3+3x^2} = \dfrac{1}{3}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x-1}\right)$.

Notons d'abord que ça a un sens car les deux expressions sous les racines tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, donc sont positives pour x assez grand. On a une forme indéterminée, et en multipliant par la quantité conjuguée on obtient :

$$\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x-1} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x-1}}$$

En $+\infty$, le numérateur est équivalent à $-x$. Pour le dénominateur, on ne somme pas les équivalents ! En factorisant par les termes les plus "forts", on obtient :

$$\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

Comme le terme entre parenthèses tend vers 2, on a finalement :
$\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x-1} \underset{x\to +\infty}{\sim} 2x$. Conclusion :

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

d) Calculer $\lim_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{\sin(x-1)}$.

On a une forme indéterminée 0/0. Pour se ramener au calcule d'une limite en 0, on fait le changement de variable : $x = 1 + h$, $h = x - 1$. On doit donc calculer la limite quand h tend vers 0 de :

$$\frac{e^{1+h} - e}{\sin h} = e \cdot \left(\frac{e^h - 1}{\sin h} \right)$$

Or on sait que $e^h - 1 \underset{h \to 0}{\sim} h$ et $\sin h \underset{h \to 0}{\sim} h$. D'où :

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\sin(x-1)} = e$$

e) On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = e$ (où e désigne $\exp(1)$).

On a : $u_n = \exp(n \ln(1+\frac{1}{n}))$. Or on sait que $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc : $\lim_{n \to +\infty} n \ln(1 + \dfrac{1}{n}) = 1$.
On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(1) = e$$