DEUG Université Louis Pasteur

Module MATH A, ANALYSE

1998-1999

Olivier Debarre et Michèle Audin

I. LES NOMBRES RÉELS

Où l'on se demande qui sont les nombres avec lesquels on va travailler.

1. L'ensemble Q des nombres rationnels

Rappelons qu'on note $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'ensemble des *entiers naturels* (on n'entrera pas ici dans les détails de sa construction). On rencontre un problème dès que l'on essaye de soustraire des entiers : pour le résoudre, on ajoute à $\mathbf{N}$ de *nouveaux éléments*, représentés par les symboles $-n$. On obtient ainsi l'ensemble $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ des *entiers relatifs* (positifs ou négatifs). On *étend* ensuite l'addition des entiers naturels à ce nouvel ensemble, de la façon que vous connaissez bien.

On rencontre un nouveau problème lorsque l'on essaye de diviser des entiers relatifs : pour le résoudre, on ajoute à $\mathbf{Z}$ de *nouveaux éléments*, appelés fractions, et représentés par les symboles p/q (avec p, $q \in \mathbf{Z}$ et $q \neq 0$), en convenant que deux de ces symboles, p/q et p'/q', sont égaux si et seulement si $pq' = p'q$ (en d'autres termes, on peut simplifier numérateur et dénominateur par un diviseur commun). Il est possible sans trop de difficultés de formaliser cette construction afin de la rendre rigoureuse. L'ensemble de toutes les fractions (appelées *nombres rationnels*) est noté $\mathbf{Q}$. De nouveau, on étend l'addition et la multiplication à cet ensemble, de la façon usuelle. Muni de ces deux opérations, $\mathbf{Q}$ est ce qu'on appelle un *corps*, c'est-à-dire que l'addition et la multiplication satisfont aux règles de compatibilité que vous connaissez (*cf.* cours d'algèbre) :

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a + 0 = a \qquad a + (-a) = 0 \qquad a + b = b + a$$
$$a(bc) = (ab)c \qquad a \times 1 = a \qquad a \times (1/a) = 1 \qquad ab = ba$$
$$a(b + c) = ab + ac\ .$$

L'élément 0 s'appelle l'élément unité (ou l'élément neutre) de l'addition, et 1 l'élément unité de la multiplication.

C'est aussi un ensemble *totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il existe une relation $\leq$ qui vérifie :

$$\text{Si } a \text{ et } b \text{ sont deux éléments, soit} \quad a \leq b\ , \quad \text{soit} \quad b \leq a\ ;$$
$$\text{si} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad b \leq a\ , \quad \text{alors} \quad a = b\ ;$$
$$\text{si} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad b \leq c\ , \quad \text{alors} \quad a \leq c\ .$$

Cette relation d'ordre fait de $\mathbf{Q}$ un *corps ordonné*, c'est-à-dire qu'elle est compatible avec les opérations de corps, de la façon suivante :

$$\text{Si} \quad a \leq b \quad , \quad \text{alors} \quad a + c \leq b + c$$
$$\text{Si} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq c \; , \quad \text{alors} \quad ac \leq bc \; .$$

Il est bon de rappeler qu'il existe bien d'autres corps (et même des corps ordonnés) que $\mathbf{Q}$ (ne serait-ce que l'ensemble des nombres réels, décrit plus bas !). L'intérêt de dégager des propriétés de base comme celles ci-dessus est que toutes leurs conséquences seront valables pour tous ces exemples, si exotiques soient-ils (à condition de n'utiliser *que* les "axiomes" ci-dessus).

L'ensemble $\mathbf{Q}$ est entièrement satisfaisant pour toutes les opérations algébriques de base : addition, soustraction, multiplication, division. En revanche, il se révèle inadéquat lorsqu'on essaye de résoudre une équation comme $x^2 = 2$ (qui apparaît naturellement lorsqu'on considère l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés 1) : en effet, aucun nombre rationnel ne vérifie cette égalité. Démontrons-le *par l'absurde* ; soit donc $x = p/q$ un rationnel de carré 2 ; la règle de simplication des fractions montre que l'on peut toujours supposer que p ou que q est *impair*. Comme $x^2 = 2$, on a $p^2 = 2q^2$, et p^2, donc aussi p, est pair. On écrit alors $p = 2p'$ (où p' est encore entier) et on obtient $2p'^2 = q^2$, de sorte que q est pair, ce qui contredit notre hypothèse que p ou q est impair.

DESSIN

Il semble bien exister cependant un "nombre" dont le carré est 2 : après tout, le graphe de la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ coupe bien l'axe des x ! Intuitivement, la courbe (ainsi que l'axe des x) n'a pas de trou. Cependant, la démonstration précédente montre que la courbe passe "à travers" l'axe des x *rationnels* sans le rencontrer. La construction des *nombres réels* vise à remplir ces trous : en d'autres termes, avec quoi faut-il compléter l'ensemble des rationnels pour obtenir un ensemble qui corresponde à notre idée intuitive de la droite ?

2. L'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels

La démarche qui préside à la construction de $\mathbf{R}$ est entièrement analogue à celle suivie pour la construction de $\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Q}$: l'ensemble de départ se révèle insuffisant lorsqu'on essaye d'effectuer certaines opérations. On lui adjoint donc de nouveaux éléments en vue d'obtenir un ensemble plus gros dans lequel on peut effectuer ces opérations, tout en conservant les propriétés de l'ensemble de départ.

La première idée qui vient à l'esprit, en regardant l'exemple de $\sqrt{2}$, est d'ajouter toutes les racines n ièmes de tous les nombres rationnels, c'est-à-dire d'ajouter des symboles $\sqrt[n]{p/q}$ qui se comportent comme on s'y attend. Ce n'est en fait pas assez : on peut montrer (c'est plus difficile) qu'il existe des fonctions polynômes à coefficients entiers dont le graphe coupe l'axe des x, mais qui n'ont cependant pas de racine qui s'exprime à l'aide des racines n ièmes des rationnels. On notera qu'à chaque fois qu'on ajoute de nouveaux éléments, il faut ajouter leur inverse, tous leurs multiples,... de façon à toujours avoir un corps. Une autre idée est d'introduire les nombres réels par leur développement décimal infini, les rationnels correspondant aux développements finis ou périodiques à partir d'un certain rang (exercice difficile : le démontrer). On prendra garde cependant au fait que certains développements décimaux différents devraient représenter le même nombre (comme $1,234$ et $1,233999999\ldots$) ; il est d'autre part très pénible de définir le produit de deux de ces développements.

Nous allons plutôt essayer ici de préciser la propriété qu'on aimerait que l'ensemble $\mathbf{R}$ à construire possède, en partant de l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2 - 2$. Si l'on regarde son graphe, on constate qu'il y a une partie "sous" l'axe des x (qui correspond aux nombres de carré ≤ 2), puis une partie au-dessus (qui correspond aux nombres de carré ≥ 2). Il est clair que le nombre $\sqrt{2}$ que l'on veut ajouter doit être plus grand que tous les éléments de l'ensemble des nombres de carré ≤ 2. Mais il n'est pas le seul ! En revanche, il semble caractérisé comme étant le plus petit des nombres plus grands que tous les éléments de l'ensemble des nombres de carré ≤ 2. Pour simplifier cette phrase et faciliter sa compréhension, il est pratique d'introduire un peu de terminologie.

3. Majorants, minorants, bornes supérieure et inférieure

Définition 3.1.– *Soit* X *une partie non vide d'un ensemble totalement ordonné* E *; on dit que* X *est :*

- majorée *s'il existe* $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ *tel que* $x \leq \mathrm{M}$ *pour tout élément* x *de* X *; on dit alors que* M *est un* majorant *de* X *;*

- minorée *s'il existe* $m \in \mathrm{E}$ *tel que* $x \geq m$ *pour tout élément* x *de* X *; on dit alors que* m *est un* minorant *de* X *;*

- bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples 3.2. 1) Toute partie *finie* est majorée et minorée (c'est un bon exercice de démontrer ce résultat, par exemple par récurrence sur le nombre d'éléments de la partie).

2) La partie $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Q}$ n'a ni majorant, ni minorant. L'ensemble $\mathbf{N}$ n'a pas de majorant, mais est minoré par 0.

3) On suppose $a < b$. Tous les intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b]$ de $\mathbf{Q}$ sont majorés (par exemple par b) et minorés (par exemple par a), donc bornés. Montrons plus précisément que pour chacun de ces quatre intervalles, *l'ensemble des majorants est* $\{\mathrm{M} \in \mathbf{Q} \mid \mathrm{M} \geq b\}$.

Démonstration. Il y a deux choses à montrer : d'abord que tout nombre plus grand que b majore l'intervalle I en question, puis que tout majorant de I est plus grand que b. Le premier point est facile : pour tout M plus grand que b et tout r dans I, on a $a \leq r \leq b \leq \mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} \geq r$, ce qui prouve que M majore I. Pour le second point, on prend M un majorant de I. Raisonnons par l'absurde et supposons $\mathrm{M} < b$; comme $(a+b)/2$ est dans I, on a

$$\frac{a+b}{2} \leq \mathrm{M} \, ,$$

de sorte que

$$a < \frac{a+b}{2} \leq \mathrm{M} < \frac{\mathrm{M}+b}{2} < b \, .$$

Ceci prouve que M n'est pas plus grand que l'élément $(\mathrm{M}+b)/2$ de I, ce qui contredit le fait que M majore I. On a ainsi montré $\mathrm{M} \geq b$. ■

4) La partie $\mathrm{X} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r^2 < 2\}$ de $\mathbf{Q}$ est majorée par 2. Plus précisément, montrons que *l'ensemble de ses majorants est* $\mathrm{Y} = \{\mathrm{M} \in \mathbf{Q} \mid \mathrm{M} \geq 0 \, , \; \mathrm{M}^2 \geq 2\}$.

De nouveau, il y a deux choses à montrer : d'abord que tout majorant de X est dans Y, puis que tout élément de Y majore X.

Soit donc M un majorant de X. Raisonnons par l'absurde et supposons $\mathrm{M}^2 < 2$. Posons

$$\varepsilon = \frac{2 - \mathrm{M}^2}{3\mathrm{M}} \, ,$$

de sorte que $\mathrm{M}^2 + 3\mathrm{M}\varepsilon = 2$, $\varepsilon > 0$, et $\varepsilon \leq 2/3\mathrm{M} \leq 2/3 < \mathrm{M}$ (car $1 \in \mathrm{X}$). On en déduit

$$2 = \mathrm{M}^2 + 3\mathrm{M}\varepsilon > \mathrm{M}^2 + 2\mathrm{M}\varepsilon + \varepsilon^2 = (\mathrm{M}+\varepsilon)^2 \, ,$$

de sorte que $\mathrm{M}+\varepsilon$ (qui est bien rationnel !) est dans X, mais est strictement plus grand que M, ce qui contredit le fait que M est un majorant de X. On a donc montré par l'absurde $\mathrm{M}^2 \geq 2$; comme $\mathrm{M} \geq 0$, on a $\mathrm{M} \in \mathrm{Y}$.

Soient maintenant M un élément de Y et r un élément de X. Si $r \leq 0$, on a bien $r \leq \mathrm{M}$. Si $r > 0$, on a $r^2 < 2 \leq \mathrm{M}^2$, donc $(\mathrm{M}-r)(\mathrm{M}+r) > 0$. Comme $\mathrm{M}+r > 0$, on en déduit $\mathrm{M}-r > 0$. Dans tous les cas, on a bien $\mathrm{M} \geq r$, ce qui prouve que M majore X. ■

Si l'on regarde les exemples ci-dessus, on s'aperçoit que dans certains cas (mais pas dans tous), un des majorants est dans la partie. Dans ce cas, et avec les notations de la définition précédente, on dit que la partie a un *plus grand élément* (on définit de façon analogue un plus petit élément).

Les majorants et les minorants ne sont en général pas uniques ; en revanche, un plus grand (ou un plus petit) élément, *s'il existe*, est unique.

Démonstration. Soient M et M' des plus grands éléments d'une partie X ; il s'agit de montrer qu'ils sont égaux. Comme M est dans X et que M' majore X, on a $\mathrm{M}' \geq \mathrm{M}$; inversement, comme M' est dans X et que M majore X, on a $\mathrm{M} \geq \mathrm{M}'$. On a donc bien $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$. ∎

On peut donc noter $\max(\mathrm{X})$ le plus grand élément de X (s'il existe !) et $\min(\mathrm{X})$ son plus petit élément.

Exemples 3.3. 1) Toute partie *finie* non vide a un plus petit et un plus grand élément.

2) La partie $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Q}$ n'a ni plus petit, ni plus grand élément ; 0 est le plus petit élément de $\mathbf{N}$.

3) On suppose $a < b$. On a $\max]a,b] = \max[a,b] = b$ dans $\mathbf{Q}$, mais il résulte de l'exemple 3.2.3) que $[a,b[$ et $]a,b[$ n'ont pas de plus grand élément (aucun majorant n'est dans ces intervalles).

4) La partie $\mathrm{X} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r^2 < 2\}$ de $\mathbf{Q}$ n'a pas de plus grand élément (il résulte de l'exemple 3.2.4) qu'aucun majorant de X n'est dans X).

On aura aussi besoin de la notion plus subtile suivante :

Définition 3.4.– *Soit* X *une partie non vide d'un ensemble totalement ordonné* E *; on dit que* X *a :*

- *une* borne supérieure *s'il existe un plus petit majorant de* X*, c'est-à-dire si l'ensemble des majorants est non vide et a un plus petit élément ;*

- *une* borne inférieure *s'il existe un plus grand minorant de* X*, c'est-à-dire si l'ensemble des minorants est non vide et a un plus grand élément.*

Pour que s soit la borne supérieure de X, il faut et il suffit que (démontrer en exercice que les deux propriétés qui suivent équivalent bien à la définition) :

- pour tout x dans X, on ait $x \leq s$;
- pour tout élément a de E tel que $a < s$, il existe un élément x de X tel que $x > a$.

De la même façon, pour que le nombre s soit la borne inférieure de X, il faut et il suffit que :

- pour tout x dans X, on ait $x \geq s$;
- pour tout élément a de E tel que $a > s$, il existe un élément x de X tel que $x < a$.

Insistons sur le fait que le plus grand élément de X, le max, s'il existe, est dans X et que ce n'est pas nécessairement le cas pour la borne supérieure, le sup.

On remarquera que la borne supérieure (ou la borne inférieure), *si elle existe*, est *unique*, puisque c'est le plus petit (ou le plus grand) élément d'un ensemble. On la note sup(X) (ou inf(X)).

Exemples 3.5. 1) Toute partie qui a un plus grand élément a une borne supérieure, et ils sont égaux. Si une partie X a une borne supérieure, elle a un plus grand élément si et seulement si cette borne supérieure est dans X.

2) Dans $\mathbf{Q}$, pour chacun des intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b]$, la borne supérieure est b, et la borne inférieure est a : cela résulte de l'exemple exI.3).

3) Le rationnel 0 est la borne inférieure de la partie $\mathrm{X} = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}, n \neq 0\}$ de $\mathbf{Q}$.

Démonstration. Il est clair que 0 est un minorant. Soit $a > 0$; on peut écrire $a = p/q$, avec p et q entiers strictement positifs. On a $a > 1/2q$ et $1/2q \in \mathrm{X}$, de sorte que a n'est pas un minorant de X. On a prouvé qu'aucun nombre strictement positif n'était un minorant et donc que 0 était le plus petit des minorants, c'est-à-dire la borne inférieure, de X. ∎

4) La partie $\mathrm{X} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r^2 < 2\}$ de $\mathbf{Q}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$.

Démonstration. Démontrons-le par l'absurde en supposant qu'il existe une borne supérieure s. Il découle de l'exemple 3.2.4) que $s^2 \geq 2$. Comme s est un rationnel et qu'aucun rationnel n'est de carré 2, on a $s^2 > 2$. Posons $\varepsilon = \frac{s^2-2}{2s}$, on a $\varepsilon > 0$ et

$$(s - \varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon = 2\ .$$

Comme $\varepsilon < \frac{s^2}{2s} \leq s$, le rationnel $s - \varepsilon$ est dans l'ensemble Y des majorants de X (déterminé dans l'exemple 3.2.4)), ce qui contredit le fait que s est le plus petit des majorants. On a donc abouti à une contradiction, ce qui démontre que X n'a pas de borne supérieure. ∎

4. Premières propriétés des nombres réels

On rappelle que notre idée directrice était de *définir* $\sqrt{2}$ comme étant la borne supérieure de l'ensemble X de l'exemple 3.2.4). Encore faut-il que cette borne supérieure existe ! C'est justement cette propriété d'existence de la borne supérieure que l'on va demander à l'ensemble $\mathbf{R}$ à construire de satisfaire. Cela remplit la première partie de notre programme ; la seconde, c'est-à-dire la construction effective des nombres réels, est, quelle que soit la méthode employée, assez technique et fastidieuse. On ne la fera donc pas ici. On peut démontrer (les lecteurs intéressés pourront trouver la démonstration dans la plupart des ouvrages) le théorème suivant :

Théorème (propriété de la borne supérieure) 4.1.– *Il existe un corps ordonné* $\mathbf{R}$ *contenant* $\mathbf{Q}$ *comme sous-corps ordonné tel que toute partie non vide majorée de* $\mathbf{R}$ *admet une borne supérieure.*

On n'explicitera pas non plus le fait qu'il n'y a qu'un tel $\mathbf{R}$ (mais il est possible de donner un sens précis à cette assertion, c'est ce qui va nous permettre de travailler ensemble...).

L'ensemble T des *réels* de carré < 2 est majoré par 3 (par exemple) car $x > 3$ entraîne $x^2 > 9$, donc $x \notin \mathrm{T}$; il admet donc une borne supérieure t *dans* $\mathbf{R}$; montrons que $t^2 = 2$. Si $t^2 < 2$, le raisonnement utilisé dans l'exemple 3.2.4) montre que si on pose

$$\varepsilon = \frac{2 - t^2}{3t} > 0 ,$$

alors $t + \varepsilon$ est dans T (c'est encore un réel!), ce qui contredit le fait que t majore T. Si $t^2 > 2$, le raisonnement utilisé dans l'exemple 3.5.4) montre que si on pose

$$\varepsilon = \frac{t^2 - 2}{2t} > 0 ,$$

alors $t - \varepsilon$ majore T, ce qui contredit le fait que t est le plus petit des majorants. On a donc $t^2 = 2$, et voilà notre racine de 2 !

A l'aide de la propriété de la borne supérieure, on peut montrer d'autres propriétés de $\mathbf{R}$. En fait, tout le cours sera plus ou moins consacré à la description des propriétés de $\mathbf{R}$ déduites des « axiomes » de base (propriétés des corps ordonnés et propriété de la borne supérieure).

Proposition 4.2.– *Toute partie non vide minorée de* $\mathbf{R}$ *admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit X une telle partie. On montre que $-\mathrm{X}$ est majorée, non vide; soit s sa borne supérieure. On vérifie que $-s$ est la borne inférieure de X. ∎

On en déduit que toute partie non vide *bornée* de $\mathbf{R}$ a une borne supérieure et une borne inférieure.

Les deux propriétés suivantes semblent très naturelles, mais sont en fait plus difficiles à démontrer.

Théorème ($\mathbf{R}$ est archimédien) 4.3.– *Si* $a > 0$ *et* $b \in \mathbf{R}$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $na > b$.

En d'autres termes, même si a est petit (mais strictement positif) et que b est grand, un multiple suffisament grand de a sera plus grand que b. Ou encore, en y mettant le temps, on peut toujours vider une baignoire avec une petite cuillère (l'histoire ne dit pas si c'est à cause de la baignoire que le nom d'Archimède est associé à cette propriété).

Signalons qu'il existe des corps ordonnés dans lesquels cette propriété n'est pas vérifiée (certains b sont plus grands que n'importe quels multiples de a); par conséquent ces corps ne vérifient pas la propriété de la borne supérieure.

Démonstration du théorème. On raisonne par l'absurde, en supposant que la conclusion n'est pas vérifiée pour un couple a et b. La partie $\mathrm{X} = \{ na \mid n \in \mathbf{N}, n \neq 0 \}$ de $\mathbf{R}$ est alors non vide et majorée par b ; soit s sa borne supérieure. Alors $s - a < s$, donc $s - a$ n'est pas un majorant : il existe un entier $m > 0$ tel que $ma > s - a$. Mais alors $(m+1)a > s$, ce qui contredit le fait que s majore X. ∎

On pourra remarquer (exercice) que cet énoncé est équivalent au fait que 0 est la borne inférieure de la partie $\{1/n \mid n \in \mathbf{N}, n \neq 0\}$ de $\mathbf{R}$. Il n'est cependant pas conséquence directe de l'énoncé de l'exemple 3.5.3) (pourquoi ?), qui lui ressemble beaucoup...

Théorème ($\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$) 4.4.– *Si $a < b$, il existe un rationnel r tel que $a < r < b$.*

Démonstration. Comme $b - a > 0$ et que $\mathbf{R}$ est archimédien, il existe un entier $q > 0$ tel que $q(b-a) > 1$. On cherche le rationnel r sous la forme p/q ; l'encadrement cherché est alors équivalent à $qa < p < qb$. Pour démontrer l'existence d'un tel entier, qui semble naturelle, l'idée est de considérer le plus petit entier $> qa$. Encore faut-il d'une part qu'il existe un entier $> qa$, et d'autre part que tous les entiers ne soient pas supérieurs à qa. On utilise de nouveau le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien : il existe un entier k tel que $k > qa$ et un entier k' tel que $k' > -qa$ (c'est-à-dire $-k' < qa$). L'ensemble $\mathrm{X} = \{j \in \mathbf{Z} \mid -k' < qa < j \leq k\}$ est alors fini et non vide (il contient k) ; il a donc un plus petit élément p. On a alors $p > qa$ puisque $p \in \mathrm{X}$ et $p - 1 \leq qa$ (puisque $p - 1$ est entier $\leq k$, mais qu'il n'est pas dans X par définition de p), de sorte que $p \leq qa + 1 < qb$. ∎

On en déduit aussitôt que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient une infinité de rationnels (si ce n'était pas le cas, il n'y aurait pas de rationnel entre l'infimum de l'intervalle et le plus petit de ces rationnels).

5. La valeur absolue

Nous allons maintenant passer en revue les diverses propriétés de la valeur absolue. Celle-ci est définie par

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geq 0 \quad , \quad |a| = -a \quad \text{si} \quad a < 0 \, .$$

Les propriétés suivantes ne font pas intervenir la propriété de la borne supérieure. Elles sont donc valables dans tout corps ordonné.

$$|a| \geq 0$$
$$|a| = 0 \iff a = 0$$
$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$$
$$|a| \geq b \iff a \geq b \quad \text{ou} \quad a \leq -b \, .$$
$$|ab| = |a| \; |b|$$
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$
$$\big|\, |a| - |b| \,\big| \leq |a+b| \, .$$

Les cinq premières se démontrent par inspection des cas. Montrons les deux dernières. On a soit $|a+b| = a+b$, auquel cas $a \leq |a|$ et $b \leq |b|$ entraînent $a+b \leq |a|+|b|$ (ici, il faut utiliser un axiome des corps ordonnés!) ; soit $|a+b| = -a-b$, mais $-a \leq |a|$ et $-b \leq |b|$ entraînent $-a-b \leq |a|+|b|$.

Enfin, $|a| = |(a+b)+(-b)| \leq |a+b|+|b|$, d'où $|a|-|b| \leq |a+b|$. De même, on a $|b| \leq |a+b|+|a|$, d'où $-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$. ∎

6. La droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$

Il est parfois commode dans la pratique d'ajouter encore deux éléments à $\mathbf{R}$, notés $-\infty$ et $+\infty$. On obtient ainsi un ensemble $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui s'appelle la *droite numérique achevée.*

Attention : cet ensemble n'est plus un corps ! Par exemple, l'addition de $-\infty$ et de $+\infty$ n'est pas définie, ni le produit de $\pm\infty$ par 0. On définit cependant :

$$\begin{array}{rlc}
(+\infty)+(+\infty) = +\infty & (-\infty)+(-\infty) = -\infty & \\
(+\infty)-(-\infty) = +\infty & (-\infty)-(+\infty) = -\infty & \\
a+(+\infty) = +\infty & a+(-\infty) = -\infty & \\
a-(+\infty) = -\infty & a-(-\infty) = +\infty & \\
a\times(+\infty) = +\infty & a\times(-\infty) = -\infty & \text{si} \quad a>0 \\
a\times(+\infty) = -\infty & a\times(-\infty) = +\infty & \text{si} \quad a<0
\end{array}$$

En revanche, la relation d'ordre total de $\mathbf{R}$ s'étend à $\overline{\mathbf{R}}$ en posant $-\infty < a < +\infty$ pour tout réel a. Les notions de plus grand et plus petit éléments, et de bornes supérieure et inférieure, s'appliquent en particulier aux parties de $\overline{\mathbf{R}}$. Remarquons que $+\infty$ est un majorant de toute partie non vide de $\mathbf{R}$, et que c'est le seul si cette partie n'est pas majorée dans $\mathbf{R}$. Par conséquent

$$\sup(\mathrm{X}) = +\infty \qquad \text{si} \qquad \mathrm{X} \quad \text{n'est pas majorée}$$

et de même

$$\inf(\mathrm{X}) = -\infty \qquad \text{si} \qquad \mathrm{X} \quad \text{n'est pas minorée.}$$

La propriété de la borne supérieure peut donc s'énoncer ainsi : *toute partie non vide de* $\overline{\mathbf{R}}$ *admet une borne supérieure et une borne inférieure* (dans $\overline{\mathbf{R}}$).

On définit aussi les intervalles suivants (dits *intervalles non bornés*), qui sont des parties de $\mathbf{R}$:

$$\begin{array}{rr}
[a,+\infty[\; = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\} &]a,+\infty[\; = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\} \\
]-\infty,a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a\} &]-\infty,a[\; = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}\ .
\end{array}$$

Par exemple, $]-\infty,\infty[\; = \mathbf{R}$.

(7.1) Soient a, b, c et d des éléments d'un corps ordonné tels que $a > b$ et $c > d$. Montrer que $a + c > b + d$.

(7.2) Soient a, b, c et d des éléments d'un corps ordonné tels que $a > b > 0$ et $c > d > 0$. Montrer que $ac > bd$.

(7.3) Soit a un élément non nul d'un corps ordonné. Montrer que $a^2 > 0$. Soient n un entier naturel non nul et K un corps ordonné, dont on note 1_{K} l'élément unité de la multiplication. Montrer que $n1_{\mathrm{K}}$ est non nul.

(7.4) Soient A, B et C trois parties non vides de $\mathbf{R}$.

a) On suppose que A est majorée et que B est inclus dans A. Montrer que B est majorée et que $\sup \mathrm{B} \leq \sup \mathrm{A}$.

b) On suppose que $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ est non vide et que A et C sont bornées. Montrer que $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ est bornée et que

$$\sup(\inf \mathrm{A}, \inf \mathrm{C}) \leq \inf(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \leq \sup(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \leq \inf(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{C}) \ .$$

c) On suppose que pour tout élément a de A et tout élément b de B, on a $a \leq b$. Montrer que $\sup \mathrm{A} \leq \inf \mathrm{B}$.

d) On suppose que A et B sont bornées et on note $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ la partie $\{a + b \mid a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}$ de $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est bornée et que

$$\inf(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \inf \mathrm{A} + \inf \mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \sup(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B} \ .$$

(7.5) Déterminer les bornes supérieure et inférieure des parties suivantes de $\mathbf{R}$:

$$\left\{ \ 1 - \frac{1}{n} \ \mid \ n \in \mathbf{N}, n \neq 0 \ \right\} \qquad \left\{ \ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \ \mid \ n \in \mathbf{N}, n \neq 0 \ \right\} \qquad \left\{ \ \frac{2n}{2n-5} \ \mid \ n \in \mathbf{N} \ \right\} \ .$$

(7.6) Soit x un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel strictement positif n tel que $\frac{1}{n} < x < n$.

(7.7) Montrer que les nombres suivants sont irrationnels : $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. La somme de deux nombres irrationnels est-elle toujours irrationnelle ?

(7.8) Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans $\mathbf{R}$: pour tous réels $a < b$, il existe un nombre irrationnel x tel que $a < x < b$.

(7.9) Soient a et b des réels tels que, pour tout entier naturel non nul n, on ait $a \leq b + 1/n$. Montrer que $a \leq b$.

(7.10) Soit a un réel. Montrer que $\sup\{x \in \mathbf{Q} \mid x < a\} = a$.

II. LES SUITES NUMÉRIQUES

8. Définition

Une suite est, intuitivement, une collection (infinie) de nombres, donnés dans un certain ordre. La formulation correcte de cette idée est de définir une suite comme une fonction de $\mathbf{N}$ dans un ensemble : cette fonction associe simplement à n le $n$ième terme de la suite. Il est traditionnel d'abandonner la notation classique $f : n \mapsto f(n)$ d'une fonction, et de noter plutôt $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ou même (u_n), une suite dont le $n$ième terme est u_n. Il n'est pas absolument nécessaire en pratique de garder en tête ce formalisme de suite comme fonction. Si la suite est une fonction de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire si les termes de la suite sont des nombres réels, on dira que la suite est *numérique*. Comme nous ne considérerons ici que des suites de ce type, nous dirons simplement *suite* au lieu de *suite numérique* : il sera toujours sous-entendu que les termes de la suite sont réels.

Pour se faciliter la vie, on permet aussi aux suites de n'être définies qu'à partir d'une certaine valeur de n (on dit « pour n assez grand »), sans que l'on le précise toujours de façon explicite. Par exemple, la suite $(1/n)$ n'est définie que pour $n \geq 1$. De toute façon, les propriétés des suites qui nous intéressent ne dépendent la plupart du temps que de leurs termes d'indice assez grand ; en d'autres termes, ces propriétés ne changent pas si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite.

Dans la pratique, la fonction f qui définit une suite s'exprime souvent à l'aide de fonctions usuelles. On parle par exemple alors de la suite $u_n = 1/n$, ou de la suite $u_n = n^{1/n}$. Mais ce n'est pas toujours le cas (*cf.* par exemple la suite dont le $n$ième terme est le $n$ième chiffre de la représentation décimale de π).

On peut aussi définir une suite par une relation de récurrence : on donne les premiers termes de la suite et on exprime comment trouver les suivants en fonction des précédents. Par exemple, $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n$ définit une suite numérique, $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ aussi, mais $w_0 = 1$, $w_{n+2} = w_{n+1} - w_n$ non (pourquoi ?).

Exemples 8.1. 1) Vous connaissez bien les suites géométriques, de la forme $(u_n) = (aq^n)$ et arithmétiques, de la forme $(u_n) = (nr + a)$.

2) Si tous les termes de la suite sont identiques, on dit que la suite est *constante*. On dira par exemple de la suite $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$ qu'elle est *constante à partir d'un certain rang*.

3) La suite dont les termes valent alternativement 1 et -1 peut se noter de façon compacte $((-1)^n)$ (on rappelle que $(-1)^n$ vaut 1 lorsque n est pair, -1 lorsque n est impair). On voit dans cet exemple (et encore mieux dans le précédent) qu'il est important de distinguer

entre une suite et l'ensemble de ses termes : d'une part l'ordre dans lequel on les numérote est important, mais d'autre part certains termes peuvent être répétés plusieurs, et même une infinité, de fois.

4) Les premiers termes de la suite $u_n = 1/n$ (définie pour $n \geq 1$) sont

$$(1 \ ; \ 0,5 \ ; \ 0,3333 \ ; \ 0,25 \ ; \ 0,2 \ ; \ 0,1666 \ ; \ 0,1428 \ ; \ 0,125 \ ; \ldots) \ .$$

5) Les premiers termes de la suite $u_n = \sin(n)/n$ (définie pour $n \geq 1$) sont

$$(0,8415 \ ; \ 0,4546 \ ; \ 0,0470 \ ; \ -0,7568 \ ; \ -0,0302 \ ; \ -0,0466 \ ; \ 0,0939 \ ; \ 0,1237 \ ,\ldots) \ .$$

Le centième terme u_{100} vaut environ $0,0051$ et le millième terme $0,0008$.

6) Les premiers termes de la suite $u_n = n^{1/n}$ (définie pour $n \geq 1$) sont

$$(1 \ ; \ 1,4142 \ ; \ 1,4422 \ ; \ 1,4142 \ ; \ 1,3797 \ ; \ 1,3480 \ ; \ 1,3205 \ ; \ 1,2968 \ ; \ldots) \ .$$

Le centième terme vaut environ $1,0471$ et le millième terme $1,0069$.

9. Convergence

Nous allons maintenant introduire une notion extrêmement importante : celle de la convergence d'une suite. Nous voulons formaliser l'idée intuitive que les termes d'une suite s'approchent de plus en plus d'une certaine valeur (qui s'appellera la limite). Dans l'exemple 8.1.2) ci-dessus, les termes sont tous égaux à 5 après un certain rang : la limite sera 5. Dans l'exemple 8.1.4), les termes s'approchent de plus en plus de 0 (sans jamais lui être égaux) : la limite sera 0. Dans l'exemple 8.1.6), les termes semblent s'approcher de plus en plus de 1 ; il faut cependant regarder énormément de termes pour se rendre compte de ce phénomène, qui n'est pas du tout évident sur les huit premiers termes. L'exemple 8.1.3) est plus complexe : on aurait envie de dire que 1 est une limite, puisque le $n$ième terme vaut 1 pour n pair très grand ; mais -1 a exactement la même propriété ! Un phénomène différent se produit dans ce cas, que vous aurez peut-être l'occasion d'étudier plus tard.

En français, on dit qu'*une suite tend* (ou *converge*) *vers une limite* ℓ si *tous* les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang. Insistons sur « *tous les termes* » : c'est ce qui fait que la suite $(-1)^n$ ne converge pas.

(9.1) En termes mathématiques, la définition est la suivante : *la suite* (u_n) *converge vers* ℓ *si, pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *tel que, pour tout* $n \geq \mathrm{N}$, *on ait* $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

On remarquera que la condition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ qui apparaît dans la définition est équivalente aux inégalités $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$, qui sont parfois plus pratiques à utiliser.

Le nombre ε (cette notation est traditionnelle) est arbitraire ; il faut y penser comme un nombre très petit : il correspond à l'expression « les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut » de la définition en français. Si $|u_n - \ell| < 0,0001$, u_n est indubitablement proche de ℓ (sans devoir nécessairement lui être égal). Cette inégalité doit être vérifiée pour tous les termes u_n avec $n \geq \mathrm{N}$: c'est ce qui correspond à « à partir d'un certain rang ». La forme la plus compacte de l'énoncé de la convergence de la suite (u_n) vers un réel ℓ, avec des quantificateurs, est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq \mathrm{N} \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \; .$$

DESSIN

Si cette définition vous paraît mystérieuse, c'est normal. Les symboles mathématiques permettent de donner un sens parfaitement précis à un énoncé, mais n'en facilitent pas pour autant la compréhension au premier abord. Un façon agréable d'énoncer cette définition est la suivante : *une suite converge vers une limite* ℓ *si, pour tout intervalle ouvert contenant* ℓ*, seuls un nombre fini de termes de la suite ne sont pas dans cet intervalle.* C'est un bon exercice de vérifier que cette définition est équivalente à la définition précédente. Revenons encore une fois à celle-ci, puisque c'est elle dont on se sert dans la pratique : on se donne ε (cela signifie que ε est arbitraire ; on ne peut pas le modifier), il faut alors exhiber un entier N à partir duquel tous les termes de la suite soient au plus à distance ε de la limite. Cela appelle deux remarques :

- il faut connaître la limite *a priori* pour pouvoir démontrer la convergence ; on fait pour cela appel à l'intuition, ou l'on calcule suffisamment de termes de la suite pour se faire une idée de son comportement ;
- il faut en principe calculer N en fonction de ε.

Nous verrons plus loin des théorèmes sur les suites numériques qui permettent de prouver leur convergence sans connaître leur limite *a priori*. Enfin, dans la pratique, on ne démontre que rarement la convergence d'une suite à l'aide de la définition, mais plutôt en utilisant des théorèmes généraux qui permettent d'éviter de manipuler les ε, comme les méthodes de comparaison avec des suites dont on connaît déjà le comportement, que vous avez déjà utilisées.

Pourquoi alors prendre la peine d'essayer de comprendre cette définition, pourquoi même l'énoncer ? La raison en est simple : le but de ce cours n'est pas tant de vous donner une liste de recettes dans laquelle vous puiserez pour résoudre des exercices spécialement conçus dans ce but, mais plutôt de vous donner une idée de la façon dont une théorie mathématique se construit.

En partant uniquement des propriétés de $\mathbf{R}$ énoncées dans le premier chapitre (comme celle de la borne supérieure) et des définitions (introduites au fur et à mesure pour formaliser des notions importantes), il s'agit de construire un édifice logique où chaque théorème est obtenu à partir des précédents par une *démonstration* : cela s'applique notamment aux « théorèmes généraux » sur les limites mentionnés plus haut, qui seront démontrés à partir de la définition de la convergence.

Suivant ce principe, nous allons maintenant démontrer la convergence (ou la non convergence, que l'on appelle *divergence*) des suites des exemples précédents. Auparavant, assurons-nous que la limite d'une suite, *si elle existe*, est unique. On la notera $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n$, ou plus simplement $\lim(u_n)$.

Proposition 9.2.– *Si une suite converge à la fois vers ℓ et ℓ', on a $\ell = \ell'$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, en supposant $\ell \neq \ell'$. La définition de la convergence dit que les termes de la suite doivent être arbitrairement proches de la limite à partir d'un certain rang ; comme aucun réel ne se trouve à distance $< |\ell - \ell'|/2$ à la fois de ℓ et de ℓ', on prendra pour ε la valeur $|\ell - \ell'|/2$. On applique alors la définition de la convergence d'une suite (u_n) vers ℓ : il existe un entier N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. De même, la convergence de la suite (u_n) vers ℓ' entraîne qu'il existe un entier N' tel que $|u_n - \ell'| < \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}'$. Pour $n = \mathrm{N} + \mathrm{N}'$, les deux inégalités sont vérifiées ; elles entraînent :

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}| + |\ell' - u_{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'| .$$

On a donc obtenu une contradiction, ce qui démontre la proposition. ∎

Passons maintenant aux exemples.

Exemples 9.3. 1) *La suite* $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$ *converge vers* 5. Plus généralement, toute suite constante égale à un nombre a à partir d'un certain rang converge vers a.

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. Par hypothèse, il existe un entier N tel que u_n soit égal à a pour $n \geq \mathrm{N}$; pour $n \geq \mathrm{N}$, on a $|u_n - a| = 0 < \varepsilon$. On a bien démontré que la suite vérifie la définition d'une suite convergente vers a. ∎

2) *La suite* $((-1)^n)$ *diverge.* On remarquera que comme on l'a mentionné plus haut, il est indispensable avec les outils à notre disposition de se faire une idée *a priori* de la divergence ou de la convergence d'une suite (et, dans ce dernier cas, de sa limite) avant de se lancer dans une démonstration : ici, on a déjà remarqué qu'une infinité de termes sont égaux à 1 (donc aussi proches de 1 que l'on veut !), mais qu'une infinité de termes sont égaux à -1 (donc sûrement pas aussi proches de 1 que l'on veut !).

Passons à la démonstration formelle; on raisonne par l'absurde, en supposant que la suite $((-1)^n)$ converge vers une limite ℓ. Appliquons la définition de la convergence vers ℓ, en prenant $\varepsilon = 1$. Pourquoi $\varepsilon = 1$? Parce que la définition de la convergence dit que les termes de la suite (à partir d'un certain rang) doivent se trouver à distance moins que ϵ de la limite, ou encore que la limite doit se trouver à distance moins que ε des termes de la suite. Or, *dans notre cas*, aucun réel ne se trouve à distance < 1 à la fois de 1 et de -1, qui sont tous deux des valeurs d'une infinité de termes de la suite. D'où notre choix; notons que tout réel strictement positif plus petit que 1 ferait tout aussi bien l'affaire.

Il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|(-1)^n - \ell| < 1$. En prenant $n = 2\mathrm{N}$, on obtient $|1 - \ell| < 1$. En prenant $n = 2\mathrm{N} + 1$, on obtient $|-1 - \ell| < 1$. On en déduit

$$2 = 1 + \ell + 1 - \ell \leq |1 + \ell| + |1 - \ell| < 2 \ ,$$

ce qui est absurde. On a donc démontré que la suite $((-1)^n)$ ne convergeait vers aucune limite ℓ : elle est divergente. ■

Vous constaterez que la divergence est souvent plus délicate à démontrer que la convergence!

3) *La suite* $u_n = 1/n$ *converge vers* 0. Soit en effet ε un réel strictement positif. On cherche à démontrer l'inégalité $|u_n - 0| < \varepsilon$ pour n « assez grand ». Comme $u_n = 1/n$, cette inégalité équivaut à $n > 1/\varepsilon$. On peut donc prendre pour N n'importe quel entier $> 1/\varepsilon$ (et il en existe puisque $\mathbf{R}$ est archimédien!) : pour $n \geq \mathrm{N}$, on a $n \geq \mathrm{N} > 1/\varepsilon$ et $|u_n| < \varepsilon$. La suite converge donc bien vers 0. ■

4) *La suite* $u_n = \sin(n)/n$ *converge vers* 0. Cela peut se montrer comme dans l'exemple précédent (exercice), en utilisant la majoration $|\sin(n)/n| \leq 1/n$.

5) *La suite* $u_n = n^{1/n}$ *converge* effectivement *vers* 1, conformément à notre intuition. Il est plus sage d'attendre les fameux « théorèmes généraux » déjà mentionnés pour le démontrer. Nous laisserons donc la démonstration en attente.

10. Suites extraites

L'idée est simple : une suite extraite d'une suite donnée (u_n) est une suite obtenue en sélectionnant (« extrayant »), dans l'ordre, un sous-ensemble infini de termes. On peut formaliser cette notion un peu vague en disant qu'une suite (v_k) est extraite de la suite (u_n) si, pour tout k, il existe un entier n_k tel que $v_k = u_{n_k}$ et

$$n_0 \ < \ n_1 \ < \ \cdots \ < \ n_k \ < \ n_{k+1} \ < \ \cdots$$

Pour une définition vraiment rigoureuse, il faut revenir à la définition d'une suite (u_n) comme une fonction $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ associant à n le terme u_n. La suite $v : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sera dite *extraite de la suite* (u_n) s'il existe une fonction strictement croissante $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $v = u \circ \sigma$. Avec les notations précédentes, on a $\sigma(k) = n_k$. Il est important de remarquer que, pour tout entier k, on a $n_k \geq k$.

Exemples 10.1. 1) La suite constante $v_n = 1$ est extraite de la suite $u_n = (-1)^n$: en effet, on a $v_n = u_{2n}$ (la fonction σ correspondante est donnée par $\sigma(k) = 2k$). De même, la suite constante (-1) est extraite de la suite $((-1)^n)$.

2) Les termes de la suite $u_n = \sin(n\pi/2)$ sont 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, $-1, \ldots$ La suite $((-1)^n)$ est extraite de cette suite puisque $(-1)^n = u_{2n+1}$. De même, les suites 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, $1, \ldots$ et 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, $-1, \ldots$ sont aussi extraites de la suite (u_n) .

3) En revanche, la suite dont les termes sont 1, $1/3$, $1/2$, $1/5$, $1/4$, $1/7$, $1/6, \ldots$ n'est pas extraite de la suite $(1/n)$ (on n'a pas extrait les termes « dans l'ordre »).

4) De façon générale, si (u_n) est une suite quelconque et a et b des entiers naturels avec $a > 0$, la suite (u_{an+b}) est extraite de la suite (u_n) . C'est par exemple le cas pour les suites (u_{n+8}) , (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{5n}) .

Théorème 10.2.– *Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Démonstration. Soient (u_n) une suite convergente et (v_k) une suite extraite de (u_n) (avec $v_k = u_{n_k}$). On se donne un ε positif. Comme (u_n) est convergente, on peut trouver un entier N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Si $k \geq \mathrm{N}$, alors $n_k \geq k \geq \mathrm{N}$, de sorte que $|u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|v_k - \ell| < \varepsilon$. On a montré que la suite (v_k) converge vers ℓ . ∎

Le théorème est souvent utilisé sous la forme suivante : si des suites extraites d'une suite donnée convergent vers des limites différentes, cette suite diverge. On peut ainsi montrer facilement que la suite $((-1)^n)$ diverge : la suite extraite $((-1)^{2n})$ converge vers 1 et la suite extraite $((-1)^{2n+1})$ vers -1 ; il y a des suites extraites de limites différentes, de sorte que la suite diverge.

Exemple 10.3. La suite $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ est extraite de la suite $(1/n)$. Elle converge donc vers 0 .

On trouvera en appendice à ce cours des résultats sur les suites extraites.

11. Premiers résultats

Montrons maintenant nos premiers résultats sur les suites convergentes, avant d'aborder des exemples plus généraux.

On dira qu'une suite (u_n) est *majorée*, ou *minorée*, ou *bornée*, si la partie $\{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ de $\mathbf{R}$ a la même propriété. Par exemple, pour que la suite soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe un réel M tel que que l'on ait $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout entier n ou, ce qui revient au même, pour tout entier n assez grand.

Proposition 11.1.– *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. On applique la définition de la convergence d'une suite (u_n) vers une limite

ℓ en prenant $\varepsilon = 1$ (toute autre valeur ferait aussi bien l'affaire) : il existe un entier N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon = 1$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. En particulier, on a $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Il s'ensuit que la suite (u_n) est bornée par le plus grand élément de la partie *finie* $\{u_0, u_1, \ldots, u_{\mathrm{N}-1}, |\ell| + 1\}$ de $\mathbf{R}$. ∎

La réciproque de la proposition est évidemment fausse : une suite peut être bornée sans être convergente (comme le prouve l'exemple de la suite $((-1)^n)$).

Proposition 11.2.– *Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite strictement positive. Les u_n sont strictement positifs pour n assez grand.*

Démonstration. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Le réel $\varepsilon = \ell$ étant strictement positif, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $\ell - \ell < u_n < \ell + \ell$, d'où $u_n > 0$, ce qui montre la proposition. ∎

Il faut prendre garde que lorsqu'une suite converge vers 0, on ne peut rien dire en général du signe de ses termes. Par exemple, les suites $(1/n)$, $(-1/n)$ et $(\sin(n)/n)$ convergent toutes vers 0, mais leurs termes ont des signes variés.

12. Encadrements et opérations algébriques sur les suites

Cette section est consacrée à la démonstration de ce que l'on a appelé plus haut les « théorèmes généraux ». Le but est d'obtenir suffisamment de ces résultats pour ne plus jamais avoir à manipuler les ε pour démontrer la convergence d'une suite ! On va notamment *démontrer* la validité de certaines des recettes que vous avez appris à utiliser au lycée.

En termes savants, le premier de ces théorèmes affirme que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques.

Théorème 12.1.– *Soient (u_n) et (u'_n) des suites convergentes.*

a) *Pour tout réel a, la suite (au_n) converge et* $\lim(au_n) = a\lim(u_n)$.

b) *La suite $(u_n + u'_n)$ converge et* $\lim(u_n + u'_n) = \lim(u_n) + \lim(u'_n)$.

Démonstration. Démontrons a). On se donne un réel strictement positif ε ; comme la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|a|+1}$. Pour $n \geq \mathrm{N}$, on a

$$|au_n - a\ell| = |a|\ |u_n - \ell| \leq |a|\frac{\varepsilon}{|a| + 1} < \varepsilon\ .$$

Ceci démontre que la suite (au_n) converge vers $a\ell$.

Démontrons b). On se donne un réel strictement positif ε ; comme la suite (u_n) converge vers ℓ, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. De même, si $\ell' = \lim(u'_n)$, il existe un entier N' tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}'$, on ait $|u'_n - \ell'| < \varepsilon/2$. Pour

$n \geq \mathrm{N} + \mathrm{N}'$, on a

$$|(u_n + u'_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |u'_n - \ell'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

C'est exactement dire que la suite $(u_n + u'_n)$ converge vers $\ell + \ell'$. ■

Exemple 12.2. On a démontré que la suite $(1/n)$ converge vers 0. Le théorème entraîne que la suite $(3/n)$ converge aussi vers 0, que la suite $(2 + 3/n)$ converge vers 2, mais que la suite $((-1)^n + 2/n)$ diverge (pourquoi ?). Plus généralement, il permet de montrer que la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente (exercice).

Passons maintenant au principe dit de « conservation des inégalités larges par passage à la limite ».

Proposition 12.3.– *Supposons données des suites convergentes (u_n) et (u'_n) vérifiant $u_n \leq u'_n$ pour tout entier n assez grand. On a alors $\lim(u_n) \leq \lim(u'_n)$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, en supposant $\lim(u_n) > \lim(u'_n)$. Le théorème 12.1 entraîne alors que la suite $(u_n - u'_n)$ a une limite strictement positive. Par la proposition 11.2, on a $u_n - u'_n > 0$ pour n assez grand, ce qui contredit l'hypothèse. ■

Pour appliquer la proposition, il est essentiel de savoir *a priori* que les deux suites convergent : elle ne peut pas servir à démontrer la convergence d'une suite. D'autre part, le résultat devient évidemment faux lorsque l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes dans sa conclusion : on a par exemple $0 < 1/n$ pour tout entier n non nul, mais la suite constante (0) et la suite $(1/n)$ convergent toutes deux vers 0 ! Les inégalités strictes « ne passent pas à la limite ».

Exemple 12.4. Si les termes d'une suite convergente (u_n) sont tous dans l'intervalle $[a, b]$ à partir d'un certain rang, $\lim(u_n)$ est aussi dans cet intervalle : on a $a \leq u_n \leq b$ pour n assez grand et il suffit d'appliquer la proposition d'une part à la suite constante (a) et à la suite (u_n), d'autre part à la suite (u_n) et à la suite constante (b). De nouveau, le résultat analogue avec des intervalles ouverts est faux !

Vous avez peut-être déjà rencontré la propriété suivante sous le nom de « théorème des gendarmes ».

Théorème 12.5.– *Supposons données des suites (u_n), (u'_n) et (u''_n) vérifiant les inégalités $u'_n \leq u_n \leq u''_n$ pour tout entier n. On suppose que les suites (u'_n) et (u''_n) convergent* vers la même limite *ℓ ; alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.*

Démonstration. Il faut vérifier la définition de la convergence de la suite (u_n) vers ℓ ; soit donc ε un réel strictement positif. Il existe un entier N' tel que $\ell - \varepsilon < u'_n < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}'$. De même, il existe un entier N'' tel que $\ell - \varepsilon < u''_n < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}''$. Pour tout entier $n \geq \mathrm{N}' + \mathrm{N}''$, on a donc $u'_n > \ell - \varepsilon$ et $u''_n < \ell + \varepsilon$, de sorte que $\ell - \varepsilon < u'_n \leq u_n \leq u''_n < \ell + \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de la suite (u_n) vers ℓ. ■

De nouveau, il suffit pour appliquer le théorème d'avoir l'inégalité $u'_n \leq u_n \leq u''_n$ *pour tout* n *assez grand.* Au contraire de la proposition précédente, ce théorème est très utile pour *démontrer* la convergence d'une suite, comme le montre les exemples suivants.

Exemples 12.6. 1) Soit r un entier strictement positif fixé; pour tout entier n non nul, on a $0 \leq 1/n^r \leq 1/n$; on a déjà vu que les suites $(1/n)$ et (0) convergent toutes deux vers 0. Le théorème entraîne que la suite $(1/n^r)_{n>0}$ converge vers 0.

2) Reprenons l'exemple de la suite $(\sin(n)/n)$. Pour tout $n > 0$, on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \ ;$$

comme la suite $(1/n)$ converge vers 0 (exemple 8.1.4), ainsi que la suite $(-1/n)$ (th. 12.1.a), le théorème entraîne que la suite $(\sin(n)/n)$ converge aussi vers 0. Cette démarche se généralise sous la forme suivante :

Corollaire 12.7.– *Supposons données des suites* (u_n) *et* (u'_n) *vérifiant* $|u_n| \leq |u'_n|$ *pour tout entier* n. *Si la suite* (u'_n) *converge vers* 0, *il en est de même de la suite* (u_n).

Démonstration. La suite $(|u'_n|)$ converge vers 0 : en effet, la définition de la convergence de la suite (u'_n) vers 0 est rigoureusement identique (c'est-à-dire rigoureuse et identique) à celle de la convergence de la suite $(|u'_n|)$ vers 0. Pour tout entier n, on a les inégalités $-|u'_n| \leq u_n \leq |u'_n|$. Comme la suite $(|u'_n|)$ converge vers 0 ; il en est de même de la suite $(-|u'_n|)$ par le théorème 12.1. On peut donc invoquer le corollaire pour conclure que la suite (u_n) converge elle aussi vers 0. ∎

Corollaire 12.8.– *Soit* (u_n) *une suite qui converge vers une limite* ℓ. *La suite* $(|u_n|)$ *converge vers* $|\ell|$.

Démonstration. En effet, la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 (th. 12.1); l'inégalité $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq |u_n - \ell|$ montre, en utilisant le corollaire précédent, notre assertion. ∎

Théorème 12.9.– *Soient* (u_n) *et* (u'_n) *des suites convergentes.*

a) *La suite* $(u_n u'_n)$ *converge et*

$$\lim(u_n u'_n) = \lim(u_n)\ \lim(u'_n)\ .$$

b) *Si la limite de la suite* (u_n) *est* non nulle, *la suite* $(1/u_n)$ *est définie pour* n *assez grand, converge, et*

$$\lim(\frac{1}{u_n}) = \frac{1}{\lim(u_n)}\ .$$

c) *Si la limite de la suite* (u'_n) *est* non nulle, *la suite* (u_n/u'_n) *est définie pour* n *assez grand, converge, et*

$$\lim(\frac{u_n}{u'_n}) = \frac{\lim(u_n)}{\lim(u'_n)}\ .$$

Démonstration. Démontrons a). La suite (u_n) étant convergente, elle est bornée par un réel M (prop. 11.1). Posons $\ell = \lim(u_n)$ et $\ell' = \lim(u'_n)$; pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} |u_n u'_n - \ell\ell'| &= |u_n u'_n - u_n\ell' + u_n\ell' - \ell\ell'| \\ &\leq |u_n u'_n - u_n\ell'| + |u_n\ell' - \ell\ell'| \\ &= |u_n|\ |u'_n - \ell'| + |u_n - \ell||\ell'| \\ &\leq \mathrm{M}|u'_n - \ell'| + |u_n - \ell|\ |\ell'|\ . \end{aligned}$$

Or la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0 (cor. 12.8), donc aussi la suite $(|\ell'|\ |u_n - \ell|)$ (th. 12.1). Un raisonnement analogue montre que la suite $(\mathrm{M}|u'_n - \ell'|)$ converge vers 0. La somme de ces deux suites converge donc encore vers 0 (th. 12.1). Il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire 12.7 pour en déduire que la suite $(u_n u'_n - \ell\ell')$ converge vers 0 donc (th. 12.1) que la suite $(u_n u'_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

Démontrons b). On suppose donc ℓ non nul ; la suite $(|u_n| - |\ell/2|)$ converge vers $|\ell|/2$ (cor. 12.8 et th. 12.1), qui est strictement positif. Par la proposition 11.2, les termes de cette suite sont strictement positifs pour n assez grand, de sorte que $|u_n| > |\ell/2|$ pour n assez grand ; en particulier, u_n n'est pas nul. Toujours pour n assez grand, on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - u_n}{u_n\ell}\right| \leq \frac{|\ell - u_n|}{|\ell|^2/2}\ .$$

Comme la suite $(|\ell - u_n|)$ converge vers 0 (cor. 12.8), il en est de même pour la suite $\left(\frac{2}{|\ell|^2}|\ell - u_n|\right)$ (th. 12.1). Le corollaire 12.7 entraîne alors que la suite $\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right)$ tend vers 0, c'est-à-dire que la suite $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.

Pour démontrer c), il suffit de remarquer que u_n/u'_n est le produit de u_n par $1/u'_n$ et d'appliquer les points a) et b) déjà montrés à ces deux suites. ■

Exemples 12.10. 1) *La suite* $(\frac{n-3}{n^2+1})$ *tend vers* 0. On ne peut pas appliquer le théorème 12.9 directement, puisque ni le numérateur, ni le dénominateur ne convergent. L'astuce est de remarquer que

$$\frac{n-3}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

(on a divisé numérateur et dénominateur par n^2). La suite $(1/n)$ tend vers 0 (exemple 8.1.4) ; il en est de même de la suite $(3/n^2)$ par l'exemple 12.6, donc aussi de la suite $(1/n - 3/n^2)$ par le théorème 12.1.b). On démontre de la même façon que la suite $(1 + 1/n^2)$ tend vers 1. On peut maintenant appliquer le théorème 12.1.b) : la suite quotient tend vers $0/1 = 0$.

2) *La suite* $(\frac{2n^3 - 3n}{n^3 - n + 1})$ *tend vers* 2. Pour la même raison, on ne peut pas appliquer le théorème 12.9 directement. On utilise la même astuce : en divisant numérateur et

dénominateur par n^3, on obtient

$$\frac{2n^3-3n}{n^3-n+1}=\frac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}\,.$$

Les mêmes arguments montrent que le numérateur tend vers $2-0=2$ et le dénominateur vers $1-0+0=1$. Le quotient tend donc vers $2/1=2$ par le théorème 12.9.b).

3) Ces exemples se généralisent aussitôt à la situation suivante : si P et Q sont des polynômes et que le degré de P est inférieur à celui de Q, la suite $(\mathrm{P}(n)/\mathrm{Q}(n))$ tend vers 0 si le degré de P est strictement inférieur à celui de Q, et vers le quotient des coefficients dominants de P et de Q si les degrés sont les mêmes.

13. Convergence dans $\overline{\mathbf{R}}$

Il est très commode dans la pratique de d'étendre la définition de la limite d'une suite convergente à des limites dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$. On veut donc définir la notion de suite « convergeant vers l'infini » ; il suffit pour cela de copier la définition de la convergence vers un réel (fini), en remplaçant « arbitrairement proche de $+\infty$ » par « arbitrairement grand ».

On dit donc qu'*une suite tend* (ou *converge*) *vers* $+\infty$ si *tous* les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

(13.1) En termes mathématiques, cela donne : *la suite* (u_n) *converge vers* $+\infty$ *si, pour tout réel* M, *il existe un entier* N *tel que, pour tout* $n \geq \mathrm{N}$, *on ait* $u_n > \mathrm{M}$.

On a une définition analogue pour les suites convergeant vers $-\infty$: *la suite* (u_n) *converge vers* $-\infty$ *si, pour tout réel* M, *il existe un entier* N *tel que, pour tout* $n \geq \mathrm{N}$, *on ait* $u_n < \mathrm{M}$.

Il faut tout de suite remarquer une certaine ambiguïté dans les définitions : celles-ci forcent à appeler « divergente » une suite « convergeant vers $+\infty$ ». Cela peut parfois prêter à confusion; si c'est le cas, on dira qu'une suite *converge vers une limite finie* si elle converge dans $\mathbf{R}$, et qu'elle *converge dans* $\overline{\mathbf{R}}$ si elle converge soit dans $\mathbf{R}$, soit vers $\pm\infty$.

Remarques 13.2. (à démontrer en exercice) 1) Si une suite (u_n) tend vers $\pm\infty$, alors la suite $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$; la réciproque est fausse (considérer par exemple la suite $((-2)^n)$; *cf.* (14.2)).

2) Une suite convergeant vers $+\infty$ n'est pas majorée (la réciproque étant évidemment fausse : penser à la suite $(n(1+(-1)^n)$, dont le terme n vaut $2n$ si n est pair, 0 sinon), mais est minorée.

3) Comme dans le cas des limites finies, il y a unicité de la limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. De plus, toute suite extraite d'une suite convergeant dans $\overline{\mathbf{R}}$ converge vers la même limite.

4) Soient (u_n) une suite convergeant vers $+\infty$ et (u'_n) une suite vérifiant $u_n \leq u'_n$ pour tout entier n assez grand. On a alors $\lim(u'_n)=+\infty$.

Exemples 13.3. 1) Montrons que *la suite* (n) *tend vers* $+\infty$. Soit M un réel quelconque; comme $\mathbf{R}$ est archimédien, il existe un entier N strictement supérieur à M. Pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, on a alors $u_n = n \geq \mathrm{N} > \mathrm{M}$, ce qui démontre que la suite (n) tend vers $+\infty$.

2) La suite $(n+(-1)^n)$ tend vers $+\infty$ car, pour tout entier n, on a $n+(-1)^n \geq n-1$ et la suite $(n-1)$, extraite de (n), tend vers $+\infty$.

3) Soit r un entier strictement positif fixé; pour tout entier n, on a $n \leq n^r$. La suite (n) tend vers $+\infty$, donc aussi la suite (n^r).

De nouveau, il est rare dans la pratique que l'on démontre qu'une suite tend vers l'infini en utilisant la définition; il est beaucoup plus courant de se référer aux théorèmes généraux ci-dessous.

Théorème 13.4.– *Soit* (u_n) *une suite convergeant vers* $+\infty$.

a) *Pour tout réel* a non nul, *la suite* (au_n) *converge vers* $+\infty$ *si* $a>0$, *vers* $-\infty$ *si* $a<0$.

b) *Si* (u'_n) *est une suite convergeant vers une limite finie ou vers* $+\infty$, *la suite* $(u_n+u'_n)$ *converge vers* $+\infty$.

Démonstration. Pour montrer a), nous ne traiterons que le cas $a>0$, le cas $a<0$ étant similaire. On se donne un réel M ; comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un entier N tel que $u_n > \mathrm{M}/a$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Comme $a>0$, on a alors $au_n > a\mathrm{M}/a = \mathrm{M}$ pour $n \geq \mathrm{N}$, ce qui démontre que $\lim(au_n) = +\infty$.

Montrons b) ; comme la suite (u'_n) est minorée, il existe un réel m tel que $u'_n \geq m$ pour tout entier n. Soit maintenant M un réel; comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un entier N tel que $u_n > \mathrm{M}-m$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. On a alors $u_n + u'_n > (\mathrm{M}-m)+m = \mathrm{M}$ pour $n \geq \mathrm{N}$, ce qui démontre que $\lim(u_n+u'_n) = +\infty$. ∎

Théorème 13.5.– *Soient* (u_n) *et* (u'_n) *des suites convergentes dans* $\overline{\mathbf{R}}$.

a) *Si* $\lim(u_n) > 0$ *et* $\lim(u'_n) = +\infty$, *la suite* $(u_n u'_n)$ *converge vers* $+\infty$.

b) *Si* $\lim(u'_n) = \pm\infty$, *la suite* $(1/u'_n)$ *est définie pour tout* n *assez grand et converge vers* 0.

c) *Si* u'_n *est* strictement positif *pour tout* n *assez grand et que la suite* (u'_n) *converge vers* 0, *la suite* $(1/u'_n)$ *converge vers* $+\infty$.

Démonstration. Montrons a). La définition de la convergence de la suite (u'_n) vers $+\infty$ appliquée avec $\mathrm{M}=0$ montre que u'_n est positif pour tout n assez grand.

Posons $\ell = \lim(u_n)$. Si ℓ est fini, la suite $(u_n - \ell/2)$ converge vers le réel strictement positif $\ell/2$. Par la proposition 11.2, on a $u_n - \ell/2 > 0$ pour tout n assez grand, d'où $u_n u'_n \geq \ell u'_n/2$. Le théorème 13.4.a) entraîne que la suite $(\ell u'_n/2)$ tend vers $+\infty$, donc aussi la suite $(u_n u'_n)$.

Si $\ell = +\infty$, on a $u_n > 1$ pour tout n assez grand, d'où $u_n u'_n \geq u'_n$. La suite $(u_n u'_n)$ tend donc vers $+\infty$.

Montrons b); soit ε un réel strictement positif; comme la suite $(|u'_n|)$ tend vers $+\infty$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|u'_n| > 1/\varepsilon$. En particulier, la suite $(1/u'_n)$ est bien définie pour n assez grand. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $|1/u'_n| < \varepsilon$, ce qui démontre que la suite $(1/u'_n)$ tend vers 0.

Montrons c); soit M un réel. Le réel $\varepsilon = 1/(|\mathrm{M}|+1)$ est strictement positif; comme la suite (u'_n) tend vers 0, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $u'_n < \varepsilon$. Comme $u'_n > 0$, on a alors $1/u'_n > 1/\varepsilon > \mathrm{M}$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$, ce qui démontre que la suite $(1/u'_n)$ tend vers $+\infty$. ■

Exemples 13.6. 1) *La suite* $(\dfrac{-5n^2+2n-7}{n-1})$ *tend vers* $-\infty$. On ne peut pas appliquer le théorème 13.5 directement, puisque le numérateur et le dénominateur convergent tous deux vers l'infini. On remarque que

$$\frac{-5n^2+2n-7}{n-1} = (-1)(n)\frac{5-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} .$$

Le numérateur de la fraction tend vers 5 et son dénominateur vers 1 ; celle-ci tend donc vers 5 (th. 12.9.b) et on peut appliquer les théorèmes 13.5.a) et 13.4.a) : son produit avec les suites (n) et (-1) tend vers $-\infty$.

2) Cet exemple se généralise à la situation suivante : si P et Q sont des polynômes et que le degré de P est strictement supérieur à celui de Q, la suite $(\mathrm{P}(n)/\mathrm{Q}(n))$ tend vers $+\infty$ si les coefficients dominants de P et de Q sont de même signe, vers $-\infty$ sinon.

14. Quelques exemples de suites

Le but de cette section est d'étudier un certain nombre de suites « standard » dont on va déterminer la convergence ou la divergence. On obtiendra en quelque sorte ainsi un catalogue auquel on pourra se référer pour comparer la plupart des suites que l'on rencontrera.

(14.1) **La suite (n^r), $r \in \mathbf{Q}$.** Si $r = p/q$, avec $q > 0$, et que x est un réel positif, on désigne par x^r l'unique réel positif dont la puissance $q$ième est x^p (un tel nombre existe : c'est la borne supérieure de la partie non vide majorée $\{y \in \mathbf{R} \mid y^q < x^p\}$ de $\mathbf{R}$, voir le chapitre III). On étendra plus tard cette notation au cas où r est un réel quelconque; les résultats ci-dessous restent encore valables dans ce cadre plus général. Les seules propriétés de la fonction $x \mapsto x^r$ dont nous nous servirons sont :

$$(x^r)^s = x^{rs}$$
$$\text{si} \quad x < y \quad \text{et} \quad r > 0 \quad , \qquad x^r < y^r \; ;$$

elles sont faciles à démontrer à partir de la définition. Montrons :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n^r \quad &= \quad +\infty \qquad \text{si} \quad r > 0 \\ &= \quad 0 \qquad \text{si} \quad r < 0 \end{aligned}$$

(ces résultats ont déjà été montrés en 12.6 et 13.3.3) lorsque r est *entier*; au fait que se passe-t-il si $r = 0$?).

Démonstration. Supposons $r > 0$; soit M un réel quelconque. Il existe un entier $\mathrm{N} > |\mathrm{M}|^{1/r}$; comme $r > 0$, on a pour $n \geq \mathrm{N}$

$$n^r \geq \mathrm{N}^r > (|\mathrm{M}|^{1/r})^r = |\mathrm{M}| \geq \mathrm{M} \ ,$$

ce qui montre le résultat. Lorsque $r < 0$, il suffit de remarquer que $n^r = (n^{-r})^{-1} = 1/n^{-r}$ et d'appliquer le théorème 13.5.b). ■

(14.2) **La suite** (a^n)**,** $a \in \mathbf{R}$. C'est la suite géométrique que vous connaissez bien. Montrons

$$\begin{array}{llll} \lim_{n\to+\infty} a^n & = 0 & \text{si} & |a| < 1 \\ & = 1 & \text{si} & a = 1 \\ & = +\infty & \text{si} & a > 1 \\ & \text{n'existe pas} & \text{si} & a \leq -1 \ . \end{array}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord un résultat intermédiaire.

Lemme 14.3.– *Soient* x *un réel* ≥ -1 *et* n *un entier. On a* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur n : pour $n = 0$, le lemme se réduit à $1 \geq 1$, qui est vrai. Supposons l'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ vérifiée; comme $1+x$ est positif, on peut multiplier les deux membres par $1+x$. On obtient

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \ ,$$

ce qui est exactement la propriété que l'on voulait démontrer à l'ordre $n+1$. On peut aussi démontrer le lemme en employant la formule du binôme (*cf.* (14.5)). ■

Supposons d'abord $a > 1$; le lemme donne, pour tout entier n

$$a^n = (1+a-1)^n \geq 1 + n(a-1) \ .$$

Comme $a - 1 > 0$, le théorème 13.4.a) entraîne que la suite $(1+n(a-1))$ tend vers $+\infty$, et il en est de même de la suite (a^n).

Lorsque $|a| < 1$ et $a \neq 0$, on remarque que $|a^n| = |a|^n = \frac{1}{(1/|a|)^n}$; comme $1/|a| > 1$, la suite $((1/|a|)^n)$ tend vers $+\infty$ par le cas déjà traité. Le théorème 13.5.b) entraîne que la suite $(|a^n|)$ tend vers 0, donc aussi la suite (a^n).

Les cas $a = 0$ et $a = 1$ sont évidents. Le cas $a = -1$ a été traité en 9.3.2). Reste le cas où $a < -1$; montrons que la suite (a^n) diverge dans ce cas : la suite extraite $(a^{2n}) = \big((a^2)^n\big)$ converge vers $+\infty$ puisque $a^2 > 1$ par le cas déjà traité en (4.2), tandis que la suite extraite $(a^{2n+1}) = \big(a(a^2)^n\big)$ converge vers $-\infty$; il y a des suites extraites de limites différentes, de sorte que la suite diverge. ■

(14.4) **La suite** (a^n/n^p)**,** $a \in \mathbf{R}$**,** $a > 1$**,** p **entier positif**. Montrons que la suite $(\frac{a^n}{n^p})$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. On peut employer la formule du binôme

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k \ . \tag{14.5}$$

dont on trouvera une démonstration dans l'exercice 17.8 (on rappelle que

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \ .)$$

Posons $b = a^{1/p} > 1$; cette formule entraîne

$$b^n = (1+b-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (b-1)^k \geq \mathrm{C}_n^2 (b-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2$$

puisque $b - 1 \geq 0$. Ainsi

$$\frac{b^n}{n} \geq \frac{(n-1)}{2}(b-1)^2 \ ,$$

ce qui montre que le membre de gauche tend vers $+\infty$ puisque $b > 1$. On peut écrire

$$\frac{a^n}{n^p} = \left(\frac{b^n}{n}\right)^p \ ,$$

ce qui entraîne que la suite $(\frac{a^n}{n^p})$ tend vers $+\infty$. ∎

(14.6) **La suite** $(a^{1/n})$**,** $a \in \mathbf{R}$**,** $a > 0$. Montrons

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} \quad = \quad 1 \ .$$

Démonstration. Supposons d'abord $a \geq 1$ et définissons une suite (u_n) en posant $u_n = a^{1/n} - 1$. On a $(1+u_n)^n = a$ et $u_n \geq 0$; le lemme 14.3 entraîne donc $a \geq 1 + nu_n$, de sorte que $0 \leq u_n \leq (a-1)/n$. Comme la suite $((a-1)/n)$ tend vers 0, le théorème 12.5 permet de conclure que la suite (u_n) tend vers 0, donc que la suite $(a^{1/n})$ tend vers 1 (th. 12.1.b)).

Si $0 < a < 1$, on remarque que $a^{1/n} = \frac{1}{(1/a)^{1/n}}$; comme $1/a > 1$, la suite $((1/a)^{1/n})$ tend vers 1 par le cas déjà traité. Le théorème 12.9.b) entraîne que la suite $(a^{1/n})$ tend aussi vers 1. ∎

(14.7) **La suite** $(n^{1/n})$. C'est le dernier des exemples du début de ce chapitre. Montrons

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} \quad = \quad 1 \ .$$

Démonstration. Définissons une suite (u_n) en posant $n^{1/n} = 1 + u_n$. On a $(1+u_n)^n = n$ et $u_n \geq 0$; la formule du binôme (*cf.* (14.5)) entraîne

$$n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u_n^k \geq 1 + nu_n + \frac{n(n-1)}{2} u_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} u_n^2$$

pour $n \geq 2$. On en déduit $0 \leq u_n \leq \sqrt{2/(n-1)}$, ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers 0, donc que la suite $(n^{1/n})$ tend vers 1. ∎

(14.8) **La suite** $(a^n/n!)$**,** $a \in \mathbf{R}$. Montrons

$$\lim_{n\to+\infty} a^n/n! \quad = \quad 0 \,.$$

Démonstration. Soit N un entier $> |a|$; pour tout $n > \mathrm{N}$, on a

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{\overbrace{|a|\cdots|a|}^{\mathrm{N}\text{ fois}}}{1\cdot 2\cdots \mathrm{N}} \; \frac{\overbrace{|a|\cdots|a|}^{n-\mathrm{N}\text{ fois}}}{(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}+2)\cdots n} \leq \frac{|a|^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \; \frac{|a|}{n} \,.$$

Comme la suite $(|a|/n)$ tend vers 0, le corollaire 2.7 permet de conclure que la suite $a^n/n!$ tend vers 0. ∎

15. Suites monotones et suites adjacentes

On va obtenir dans cette section nos premiers résultats qui permettront de conclure à la convergence d'une suite sans connaître *a priori* sa limite, ni même sans la déterminer.

On dira qu'une suite (u_n) est *croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n. Une suite est dite *monotone* si elle est soit croissante, soit décroissante.

Exemples 15.1. 1) Soit r un rationnel ; la suite (n^r) étudiée en (14.1) est croissante pour $r \geq 0$, décroissante pour $r \leq 0$.

2) Soit a un réel fixé ; pour $a \geq 0$, la suite $(a^n/n!)$ étudiée en (14.8) est décroissante « à partir d'un certain rang » (plus précisément, pour $n \geq a$). Elle n'est pas monotone pour $a < 0$.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 15.2.– *Toute suite monotone converge dans* $\overline{\mathbf{R}}$. *Une suite croissante converge vers la borne supérieure de l'ensemble de ses termes ; pour que sa limite soit finie, il faut et il suffit que la suite soit majorée. Une suite décroissante converge vers la borne inférieure de l'ensemble de ses termes ; pour que sa limite soit finie, il faut et il suffit que la suite soit minorée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante. Par la proposition 11.1, l'ensemble des termes de cette suite admet une borne supérieure ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$. Montrons que (u_n) converge vers ℓ. On distingue deux cas.

Premier cas : ℓ **est finie.** Soit ε un réel strictement positif; comme $\ell = \sup \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, il existe un entier N tel que $u_{\mathrm{N}} > \ell - \varepsilon$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a d'une part $u_n \geq u_{\mathrm{N}} > \ell - \varepsilon$ puisque la suite (u_n) est croissante, d'autre part $u_n \leq \ell$ puisque ℓ majore l'ensemble des termes de la suite. On en conclut $|u_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui démontre que la suite (u_n) tend vers ℓ.

Deuxième cas : $\ell = +\infty$**.** Soit M un réel; comme $\sup \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\} = +\infty$, il existe un entier N tel que $u_{\mathrm{N}} > \mathrm{M}$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \geq u_{\mathrm{N}} > \mathrm{M}$ puisque la suite (u_n) est croissante, ce qui démontre que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Si la suite (u_n) est décroissante, la suite $(-u_n)$ est croissante. Elle converge donc vers la borne supérieure de $\{-u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, qui n'est autre que $-\inf \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ (*cf.* I.2). La suite (u_n) converge donc vers la borne inférieure de l'ensemble de ses termes. ■

Exemples 15.3. 1) **Développements décimaux** : soit (k_n) une suite d'entiers, avec k_n compris entre 0 et 9 pour $n \geq 1$. Considérons la suite (u_n) des développements décimaux k_0 ; k_0, k_1 ; $k_0, k_1 k_2$; $\ldots$; $k_0, k_1 k_2 \cdots k_n$; $\ldots$, c'est-à-dire

$$u_n = k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} .$$

La suite (u_n) est clairement croissante; d'autre part, on a pour tout n

$$u_n \leq k_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} .$$

On vérifie facilement l'identité $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, valable pour tout réel $x \neq 1$. Si on l'applique avec $x = 1/10$, on obtient

$$u_n \leq k_0 - 9 + 9\frac{1 - (1/10)^{n+1}}{1 - 1/10} < k_0 - 9 + 9\frac{1}{1 - 1/10} = k_0 + 1 ,$$

ce qui montre que la suite (u_n) est majorée, donc, par le théorème, convergente. Sa limite est un nombre réel $\leq k_0 + 1$ dont le développement décimal infini est donné par la suite (k_n). On peut montrer inversement que tout réel a un développement de ce type.

2) La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ est visiblement croissante. On a $n! \geq 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} < 3 , \end{aligned}$$

de sorte que la suite (u_n), croissante et majorée, converge vers une limite ≤ 3. Cette limite joue un rôle important en mathématique : c'est le nombre qui est la « base » des logarithmes népériens; on la note e.

(15.4) On se donne maintenant des suites (u_n) et (u'_n) vérifiant les propriétés suivantes :

a) la suite (u_n) est croissante et la suite (u'_n) décroissante ;

b) la suite $(u'_n - u_n)$ tend vers 0 ;

de telles suites sont dites *adjacentes.*

Proposition 15.5.– *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration. L'hypothèse a) de la définition (15.4) entraîne que la suite $(u'_n - u_n)$ est décroissante ; sa limite étant 0, le théorème 15.2 entraîne que 0 est la borne inférieure de l'ensemble de ses termes. Ceux-ci sont en particuliers positifs : pour tout n, on a $u_n \leq u'_n$. Comme la suite (u'_n) est décroissante, on a $u'_n \leq u'_0$, de sorte que la suite (u_n), croissante, est majorée par u'_0 : elle converge vers une limite finie ℓ par le théorème 15.2. On montre de façon analogue que la suite décroissante (u'_n) est minorée par u_0 ; le théorème 15.2 entraîne qu'elle converge vers une limite finie ℓ'. La condition b) de (15.4) entraîne $\ell = \ell'$. ■

Exemple 15.6. On vérifie (*cf.* exerc. 17.18) que les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $u'_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes (seule la décroissance de (u'_n) demande un petit calcul). Elles convergent donc vers la même limite, que l'on a déjà notée e.

16. Suites de Cauchy

(16.1) On en vient maintenant à un concept extrêmement important du point de vue théorique : une suite (u_n) est dite *de Cauchy* si, pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier N tel que, pour tous entiers m et n plus grands que N, on ait $|u_m - u_n| < \varepsilon$.

Cette définition ressemble beaucoup à celle d'une suite convergente : la grande différence est que l'on n'y mentionne pas de limite ! Le résultat suivant fait de cette notion un nouveau moyen de montrer la convergence d'une suite sans connaître sa limite *a priori.*

Théorème 16.2.– *Pour qu'une suite numérique soit convergente vers une limite finie, il faut et il suffit que ce soit une suite de Cauchy.*

Attention ! Le théorème 16.2 serait faux si on était resté dans le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels : il existe des suites de Cauchy dont tous les termes sont rationnels et qui ne convergent vers aucun nombre rationnel. C'est le cas par exemple pour la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ (exercice).

Démonstration du théorème. Il s'agit de montrer d'une part que toute suite convergente est de Cauchy, d'autre part que toute suite de Cauchy est convergente.

Soient donc (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ et ε un réel strictement positif. Il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Pour tous entiers m et n plus grands que N, on a donc $|u_m - \ell| < \varepsilon/2$ et $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$, de sorte que

$$|u_m - u_n| \leq |u_m - \ell| + |\ell - u_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ ,$$

ce qui montre que (u_n) est une suite de Cauchy.

Soit maintenant (u_n) une suite de Cauchy ; il s'agit de montrer qu'elle est convergente. Montrons d'abord qu'elle est bornée. On procède comme pour montrer que les suites convergentes sont bornées. On choisit un ε totalement arbitraire, par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe un entier N tel que, pour tous entiers m et n plus grands que N, on ait $|u_m - u_n| < 1$; en particulier $|u_m - u_{\mathrm{N}}| < 1$ pour $m \geq \mathrm{N}$. Donc, toujours pour $m \geq \mathrm{N}$,

$$u_{\mathrm{N}} - 1 < u_m < u_{\mathrm{N}} + 1$$

et $\max\{u_0, \ldots, u_{\mathrm{N}}, u_{\mathrm{N}} + 1\}$ est un majorant de u_n (on écrit facilement un minorant, exercice). En particulier, on peut définir des suites par

$$v_n = \inf_{m \geq n} \{u_m\} \qquad \text{et} \qquad w_n = \sup_{m \geq n} \{u_m\} \ .$$

Elles encadrent (u_n) puisqu'évidemment $v_n \leq u_n \leq w_n$,et la suite (v_n) est croissante, tandis que (w_n) est décroissante. Montrons qu'elles sont adjacentes : la propriété de Cauchy nous assure que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N' tel que, pour tous entiers m et n plus grands que N', on ait $|u_m - u_n| < \varepsilon/3$, soit encore

$$u_n - \varepsilon/3 < u_m < u_n + \varepsilon/3 \ .$$

Le réel $u_n - \varepsilon/3$ est ainsi un minorant de l'ensemble $\{u_m \mid m \geq n\}$, donc est plus petit que sa borne inférieure v_n. De même, le réel $u_n + \varepsilon/3$ est un majorant de l'ensemble $\{u_m \mid m \geq n\}$, donc est plus grand que sa borne supérieure w_n. On a donc

$$u_n - \varepsilon/3 \leq v_n \leq w_n \leq u_n + \varepsilon/3 \ ,$$

pour tout $n \geq \mathrm{N}'$, d'où $0 \leq w_n - v_n \leq (u_n + \varepsilon/3) - (u_n - \varepsilon/3) = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. On a ainsi montré que la suite $(w_n - v_n)$ tend vers 0. Les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite (prop. 15.5), donc aussi la suite (u_n) (th. 12.5). ■

Exemple 16.3. Pour tout réel x tel que $|x| < 1$, la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_n = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$ est de Cauchy ; en effet, on a pour tous entiers $m > n$

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \cdots + \frac{x^m}{m} \right| \\ &\leq |x|^{n+1}(1 + |x| + \cdots + |x|^{m-n-1}) \\ &= |x|^{n+1}\left(\frac{1 - |x|^{m-n}}{1 - |x|}\right) \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} \ . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; comme la suite $\left(\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\right)$ tend vers 0 (*cf.* (14.2)), il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} < \varepsilon$. Pour $m > n > \mathrm{N}$, on a alors $|u_m - u_n| < \varepsilon$; ceci prouve que (u_n) est une suite de Cauchy, donc qu'elle converge (on verra plus tard que sa limite est $-\log(1-x)$).

EXERCICES

(17.1) Montrer par des exemples que les « définitions » suivantes de la convergence d'une suite sont incorrectes :

a)
$$\exists \mathrm{N} \in \mathbf{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq \mathrm{N} \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon \ ;$$

b)
$$\forall \mathrm{N} \in \mathbf{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq \mathrm{N} \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

(17.2) Déterminer les limites des suites suivantes (si elles existent) :

a) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

b) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

(17.3) Déterminer les limites des suites suivantes (si elles existent) :

a) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$;

b) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;

c) $\left(\dfrac{3n^2+5}{2n^2-4}\right)$;

d) $\left(\dfrac{2n^2+3}{n-1}\right)$;

e) $\left(\dfrac{n+\sqrt{n}+1}{n-3}\right)$;

f) $\left(\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}+1}{n-3}\right)$;

g) $\left(\dfrac{(-1)^n n^2+n-3}{2n^2+n-4}\right)$.

(17.4) Montrer que si une suite (u_n) est à termes positifs et tend vers 0, il en est de même de la suite $(\sqrt{u_n})$.

(17.5) Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$; on définit une suite v_n en posant

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

pour tout n. Montrer que $\lim(v_n) = \ell$.

(17.6) Utiliser l'exercice précédent pour déterminer $\lim((n!)^{1/n})$.

(17.7) On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n^2$.

a) Montrer que si la suite (u_n) converge, sa limite est soit 0 , soit $1/2$.

b) La suite (u_n) converge-t-elle ?

(17.8) Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on pose

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

a) On suppose $k < n$; montrer que $\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1}$.

b) Démontrer la formule du binôme

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$$

(on pourra procéder par récurrence sur n).

(17.9) Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont non nuls et telle que la suite $(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|)$ converge vers une limite L .

a) Si $\mathrm{L} < 1$, montrer que la suite (u_n) converge vers 0 .

b) Si $\mathrm{L} > 1$, montrer que la suite $(|u_n|)$ converge vers $+\infty$.

c) Si $\mathrm{L} = 1$, montrer par des exemples que la suite (u_n) peut soit converger vers une limite finie, soit converger vers $+\infty$, soit ne pas converger dans $\overline{\mathbf{R}}$.

(17.10) Utiliser l'exercice précédent pour étudier la convergence des suites (a^n/n^p) et $(a^n/n!)$, où a et p sont des réels (on retrouve ainsi le résultat de (14.8)).

(17.11) Utiliser l'exercice 17.9 pour étudier la convergence de la suite $((n!)^2/(2n)!)$.

(17.12) On définit une suite (u_n) en posant $u_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ pour tout $n > 0$.

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que $u_{2n} - u_n \geq 1/2$ pour tout $n > 0$. En déduire que la suite (u_n) converge vers $+\infty$.

b) On empile des briques identiques les unes sur les autres, en essayant de les faire déborder le plus loin possible. Jusqu'où peut-on aller ?

(17.13) Soit (u_n) une suite croissante ; on définit une suite v_n en posant

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

pour tout n . Montrer que la suite (v_n) est croissante.

(17.14) On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{3}$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

(17.15) On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

a) Ecrire les 5 premiers termes de la suite (u_n) .

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante majorée.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

(17.16) On définit une suite (u_n) en posant $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = (1 - \dfrac{1}{(n+1)^2})u_n$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que $u_n = \dfrac{n+1}{2n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

(17.17) Soit S une partie non vide de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une suite croissante d'éléments de S qui converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ vers sup (S).

(17.18) Montrer que les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $u'_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes; on note e leur limite commune. Pour tout n, montrer que $n!u_n$ est un entier, et que $|n!u_n - n!e| < 1$. En déduire que e est irrationnel.

(17.19) Soient a et b des réels positifs tels que $a \leq b$; on définit des suites (u_n) et (u'_n) par les relations

$$u_0 = a \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + u'_n}{2}$$

$$u'_0 = b \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n u'_n}\ .$$

Montrer que les suites (u_n) et (u'_n) sont adjacentes.

(17.20) Soit α un réel tel que la suite $(\sin(n\alpha))$ converge vers une limite ℓ.

a) Montrer que la suite $(\cos^2(n\alpha))$ converge vers $(1-\ell^2)$.

b) Montrer que $\ell = 0$ (utiliser une expression de $\sin(2n\alpha)$).

c) Montrer que $\sin(\alpha) = 0$, donc que α est un multiple entier de π (utiliser une expression de $\sin((n+1)\alpha)$).

(17.21) Montrer qu'un nombre réel possède un développement décimal périodique si et seulement si ce nombre est rationnel.

III. CONTINUITÉ DES FONCTIONS

18. Définition de la continuité

On va étudier des fonctions $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ où D est une partie de $\mathbf{R}$. La partie D fait partie de la donnée de la fonction f. Dans la pratique, on définit parfois la fonction par une formule sans préciser D. Il est alors sous-entendu que D est la plus grande partie de $\mathbf{R}$ sur laquelle la formule définit quelque chose.

Dans ce chapitre, on va souvent s'intéresser à ce qui se passe près d'un point x_0. Il sera commode de dire qu'une propriété est vraie « au voisinage de x_0 » si elle est vraie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

En définissant la continuité d'une fonction f en un point x_0, nous voulons formaliser l'idée intuitive que la fonction « ne saute pas ». En français, on dit qu'*une fonction est continue* en un point x_0 si *toutes* les valeurs qu'elle prend sont aussi proches que l'on veut de sa valeur en x_0 dès que l'on est assez près de x_0.

En termes mathématiques, on dit que la fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ est *continue* en x_0 si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout x de D tel que $|x - x_0| < \delta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La forme la plus compacte de la définition de la continuité de f en x_0, avec des quantificateurs, est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{D} \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ .$$

Comme dans le cas de la convergence des suites, le nombre ε est arbitraire ; il faut y penser comme à un nombre très petit. Il correspond à l'expression « aussi proches que l'on veut » de la définition en français.

DESSIN

En pratique, on fixe $\varepsilon > 0$ arbitraire, et il faut trouver un $\delta > 0$, qui *a priori* dépend de ε, satisfaisant cette condition. Graphiquement, on fixe un intervalle arbitrairement petit autour de $f(x_0)$ et donc une bande autour de la droite $y = f(x_0)$. On peut trouver un intervalle autour de x_0 tel que la partie du graphe de la fonction située au-dessus de cet intervalle soit contenue dans cette bande.

On dit que la fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ est *continue sur* D si elle est continue en tout point de D.

Exemples 18.1. 1) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = a$ (constante) est continue sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. On fixe un $\varepsilon > 0$, tous les δ conviennent. C'est un exemple où δ ne dépend ni de x_0 ni de ε. ∎

2) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. On se donne un $\varepsilon > 0$, on voit immédiatement que $\delta = \varepsilon$ convient. Ici δ dépend de ε mais pas de x_0. ∎

3) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. On veut montrer que f est continue en tout point x_0 de $\mathbf{R}$. On fixe donc un x_0 et on se donne un réel strictement positif ε. On remarque tout d'abord que

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0| \cdot |x - x_0|$$

et que $|x + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0|$. On pose alors

$$\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}, 1) ,$$

de sorte que

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x + x_0| < \delta + 2|x_0| \leq 1 + 2|x_0|$$

et, toujours pour $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| < (2|x_0| + 1)\frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} = \varepsilon .$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. On remarquera qu'ici, le δ trouvé dépend effectivement de ε et de x_0. ∎

4) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. On veut montrer que f est continue en tout point x_0 de $\mathbf{R}$. On se donne un réel strictement positif ε ; on a

$$|x - x_0| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| = \big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

de sorte que $\delta = \varepsilon$ convient. ∎

5) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$ et $f(x) = x$ pour $x \leq 0$ n'est pas continue en 0.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant f continue en 0 ; en prenant $\varepsilon = 1$, il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout x dans $]-\delta, \delta[$, on ait $|f(x)| < 1$. Mais c'est absurde, puisque $f(x) \geq 1$ pour tout x dans $]0, 1]$. ■

L'exemple suivant va montrer qu'en fait, la notion est assez fine, bien plus que la simple idée intuitive « la fonction ne saute pas » pourrait le laisser penser. Il faut noter que, jusqu'au XIX^{e} siècle, la plupart des mathématiciens imaginaient que, à part quelques petits sauts, les fonctions étaient continues.

6) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = 1$ si x est rationnel. Cette fonction n'est continue *en aucun point.*

Démonstration. Fixons $x_0 \in \mathbf{R}$ et montrons que f n'est pas continue en x_0. Raisonnons par l'absurde, en supposant f continue en x_0 ; en prenant $\varepsilon = 1$, il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout x dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Mais l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels (voir le chapitre I, prop. 4.4 et exerc. 7.8) donc un x tel que $|f(x) - f(x_0)| = 1$: si x_0 est rationnel, on choisit x rationnel et si x_0 est irrationnel, on choisit x irrationnel. On a donc obtenu une contradiction. ■

On peut faire encore plus pathologique : on peut montrer par exemple que la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$, avec p, $q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$ et p et q n'ont pas de facteur commun (la fraction est simplifiée), est continue en x_0 si et seulement si x_0 est irrationnel.

19. Continuité et suites

Si la définition de la continuité « avec ε et δ » vous a rappelé celle de la convergence des suites, ce n'est pas un hasard. Il y a en effet des relations profondes entre les deux notions.

Proposition 19.1.– *La fonction* $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ *est continue au point* x_0 *de* D *si et seulement si, pour toute suite* (u_n) *de points de* D *convergeant vers* x_0, *la suite* $(f(u_n))$ *converge vers* $f(x_0)$.

On écrira souvent la conclusion de cette proposition sous la forme

$$\lim(f(u_n)) = f(\lim(u_n)) .$$

Démonstration de la proposition. Supposons d'abord f continue en x_0. Soit (u_n) une suite d'éléments de D qui converge vers x_0. Donnons-nous un réel ε strictement positif. Il existe donc un réel positif δ tel que si $|x - x_0| < \delta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|u_n - x_0| < \delta$. En particulier, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, ce qui veut exactement dire que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Réciproquement, supposons que, pour toute suite (u_n) d'éléments de D convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$. Il s'agit de montrer que f est continue en x_0. Prenons $\varepsilon > 0$ et raisonnons par l'absurde, en supposant qu'aucun $\delta > 0$ ne convient dans la définition : pour tout $\delta > 0$, il existe donc un point x de D vérifiant $|x - x_0| < \delta$ mais pas $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Appliquons ceci à $\delta = 1/n$: il existe un réel u_n dans D tel que $|u_n - x_0| < 1/n$ et $|f(u_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. On construit ainsi une suite (u_n) qui converge vers x_0 mais telle que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$. C'est contraire à notre hypothèse, ce qui démontre la proposition. ■

20. Opérations sur les fonctions continues

Nous allons donc pouvoir utiliser les théorèmes que nous avons démontrés sur les suites convergentes au chapitre II pour démontrer des théorèmes sur les fonctions continues.

Proposition 20.1.– *Soient f et g des fonctions continues en x_0.*

a) *Pour tout réel a, la fonction af est continue en x_0.*

b) *La fonction $f+g$ est continue en x_0.*

c) *La fonction fg est continue en x_0.*

d) *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction f/g est continue en x_0.*

Démonstration. On pourrait démontrer chacune des assertions en *copiant* la démonstration de l'assertion analogue sur les suites convergentes (chapitre II). On va les démontrer ici en *utilisant* l'assertion correspondante sur les suites convergentes.

Par exemple, pour b), soit (u_n) une suite convergeant vers x_0. Comme f et g sont continues en x_0, les suites $(f(u_n))$ et $(g(u_n))$ convergent vers $f(x_0)$ et $g(x_0)$ respectivement (sens direct de la proposition). La suite $(f(u_n) + g(u_n))$ converge alors (th. 12.1, chap. II) vers $f(x_0) + g(x_0)$. Ceci pour toute suite (u_n) convergeant vers x_0, de sorte que le sens « réciproque » de la proposition implique que $f+g$ est continue en x_0. Les autres points se traitent de façon analogue ■

Remarque 20.2. Si g est une fonction définie au voisinage d'un point x_0, continue en x_0, et non nulle en x_0, elle reste non nulle au voisinage de x_0 : posons $\varepsilon = |g(x_0)|/2$, qui est strictement positif ; comme g est définie au voisinage de x_0 et est continue en ce point, on en déduit un nombre δ strictement positif tel que, pour tout x dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on ait $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Sur cet intervalle, on a

$$|g(x)| \geq |g(x_0)| - |g(x_0) - g(x)| > 2\varepsilon - \varepsilon > 0 ,$$

ce qui montre que g ne s'annule pas sur l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. En particulier, dans la situation du d) de la proposition, si les fonctions f et g sont définies au voisinage de x_0, il en est de même de la fonction f/g.

Exemple 20.3. Toute fonction polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est continue ; toute fraction rationnelle $f(x) = \mathrm{P}(x)/\mathrm{Q}(x)$ (où P et Q sont des polynômes) est continue là où elle est définie (c'est-à-dire en les points où Q ne s'annule pas).

Proposition 20.4.– *Soient f et g des fonctions. On suppose que f est continue en x_0, et que g est continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration. Notons D_f le domaine de définition de f et D_g celui de g. Le domaine de définition D de $g \circ f$ est l'ensemble des éléments x de D_f tels que $f(x)$ soit dans D_g. Soit (u_n) une suite d'éléments de D convergeant vers x_0. Comme f est continue en x_0, la suite $(f(u_n))$ est une suite d'éléments de D_g qui converge vers $f(x_0)$. Comme g est continue en $f(x_0)$, la suite $(g(f(u_n)))$ converge vers $g(f(x_0))$. Par la prop. 19.1, cela prouve que la fonction $g \circ f$ est continue en x_0. ∎

Remarque 20.5. Tout comme dans la remarque 20.2, on peut montrer que si f est définie au voisinage de x_0 et continue en x_0, et que g est définie au voisinage de $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0.

Exemple 20.6. Si f est continue en x_0, il en est de même de la fonction $|f|$ (on utilise $g(y) = |y|$).

21. Limites de fonctions

Considérons un intervalle (quelconque) I de $\mathbf{R}$, un point x_0 de I (qui peut très bien être par exemple une des bornes de I) et une fonction f définie sur $\mathrm{I}-\{x_0\}$.

On dit que f tend vers une limite ℓ quand x tend vers x_0 si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ pour tous les x assez proches (mais *différents*) de x_0.

Cette définition « en français » peut se traduire en symboles mathématiques :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}-\{x_0\} \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\ .$$

Il est possible que la fonction f soit définie en x_0. La valeur qu'elle prend en x_0 ne joue aucun rôle dans cette définition.

Remarque 21.1. Cette définition permet de rendre précise la notion de limite introduite au lycée, où soit on procède de façon intuitive soit, dans le meilleur des cas, on utilise des « fonctions de référence ». Cette dernière méthode permet de traiter beaucoup d'exemples usuels, mais aboutit dans des cas plus subtils à des absurdités. L'idée est de se donner une collection de fonctions dont on *décrète* qu'elles tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 (comme par exemple les fonctions $x \mapsto x^n$ pour n entier strictement positif), et de comparer une fonction donnée à l'une de ces fonctions : on dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 s'il existe une constante C et un entier $n > 0$ tels que

$$|f(x) \leq \mathrm{C}|x|^n$$

pour tout x non nul proche de 0. Le problème est que la fonction $x \mapsto 1/\log|x|$ (on définira les fonctions logarithmes au § 24) ne satisfait pas à ce critère, alors qu'elle tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0 (*cf.* prop. 24.5.b)). *On ne peut pas donner de définition convenable de la notion de limite d'une fonction basée sur le concept de « fonction de référence ».*

Exemples 21.2. 1) La fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x^2$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 0$ a pour limite 1 quand x tend vers 1 (exercice).

2) Le point x_0 peut être une des extrémités de l'intervalle I. Par exemple, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \sin(x)/x$ a pour limite 1 quand x tend vers 0.

DESSIN

On démontre, comme au chapitre II pour les suites, que la limite, quand elle existe, est unique (exercice). On peut alors utiliser la notation $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

La définition ressemble beaucoup à celle que nous avons utilisée pour la continuité d'une fonction en x_0. Cette ressemblance fait qu'on démontre aisément :

Proposition 21.3.– *Soient f une fonction définie sur un intervalle* I *et x_0 un point de* I. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle a une limite en x_0 et que cette limite est $f(x_0)$.*

(21.4) Soient I un intervalle et x_0 un point de I. Supposons que la fonction f soit définie sur $\mathrm{I}-\{x_0\}$ et qu'elle ait une limite finie ℓ quand x tend vers x_0. On peut alors définir une fonction g sur tout l'intervalle I par

$$g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \neq x_0 \quad , \qquad \text{et} \quad g(x_0) = \ell \ .$$

On déduit de la proposition précédente que g est continue en x_0. On dit que g est le « prolongement par continuité » de f, ou que l'« on a prolongé f par continuité en x_0 ». Par exemple, la fonction $\sin(x)/x$ est définie sur $\mathbf{R} - \{0\}$. On peut la prolonger par continuité en 0 en décidant que la fonction prolongée vaut $1 = \lim_{x \to 0} \sin(x)/x$ en 0.

On peut aussi traduire l'existence d'une limite en x_0 en termes de suites :

Proposition 21.5.– *La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathrm{I} - \{x_0\}$ tendant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.*

La démonstration est analogue à celle que nous avons faite pour relier continuité et suites convergentes, aussi nous la laissons aux lecteurs en exercice.

On peut utiliser cette proposition et nos résultats sur les suites du chapitre II pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 21.6.– *Soient I un intervalle, x_0 un point de I, et f et g des fonctions définies sur $\mathrm{I} - \{x_0\}$. On suppose que f et g admettent des limites en x_0.*

a) *La fonction $f+g$ a une limite en x_0 et*

$$\lim_{x \to x_0} \big((f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \ .$$

b) *La fonction fg a une limite en x_0 et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) \ .$$

c) *On suppose que la limite de g en x_0 n'est pas nulle. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que g ne s'annule en aucun point de $(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) - \{x_0\}$. La fonction f/g est définie sur $(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) - \{x_0\}$, a une limite en x_0 et*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \ .$$

d) *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans $\mathrm{I} - \{x_0\}$, on a*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) \ .$$

On peut aussi parler de limites égales à $+\infty$ ou $-\infty$ (c'est ℓ qui est remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$) et de limites en $+\infty$ ou $-\infty$ (c'est x_0 qui devient $+\infty$ ou $-\infty$).

Exemples 21.7. 1) Considérons la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=1/x$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$. Pour la fonction g définie sur $]-\infty,0[$ par $g(x)=1/x$, on trouvera $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$. Si on a envie de penser que la formule $1/x$ définit une fonction sur $\mathbf{R}-\{0\}$, on pourra adopter la notation

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\ .$$

2) On aura aussi

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0\ .$$

22. Le théorème des valeurs intermédiaires

C'est un théorème important et utile, et qui s'énonce ainsi :

Théorème 22.1.– *L'image d'un intervalle de* $\mathbf{R}$ *par une fonction continue est un intervalle de* $\mathbf{R}$.

DESSIN

Ce qui veut dire que si f est continue sur un intervalle $\mathrm{I}\subset\mathbf{R}$, et si f prend les valeurs a et b sur I, alors elle prend toutes les valeurs comprises entre a et b. Par exemple, la fonction f continue (polynôme) définie par $f(x)=x^2-2$ sur l'intervalle $[0,2]$ prend la valeur -2 (en 0) et la valeur 2 (en 2). Le théorème affirme qu'elle doit donc prendre toutes les valeurs comprises entre -2 et 2 et en particulier la valeur 0 ; il entraîne donc l'existence d'un réel de carré 2 compris entre 0 et 2. Il est donc certain qu'il va falloir utiliser une propriété spécifique de $\mathbf{R}$ pour le démontrer.

Remarquons que l'intervalle dont il est question dans cet énoncé peut très bien n'être pas borné. On va utiliser la caractérisation suivante des intervalles (exercice 25.4) : *une partie* J *de* $\mathbf{R}$ *est un intervalle si et seulement si quand elle contient des réels* z_1 *et* z_2 *tels que* $z_1<z_2$, *elle contient tous les réels compris entre* z_1 *et* z_2.

Démonstration du théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On se donne des éléments x_1 et x_2 de I tels que $x_1\le x_2$ et un réel y compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. On veut montrer qu'il existe un réel x entre x_1 et x_2 tel que $y=f(x)$.

Pour fixer les idées, on suppose que $f(x_1) \leq f(x_2)$ (le cas contraire se traite de façon analogue). L'idée de la démonstration est assez simple et jolie : on considère le milieu w_0 du segment $[x_1, x_2]$, on remplace x_1 ou x_2 par w_0, et on recommence dans l'intervalle deux fois plus petit obtenu. Précisément, on construit par récurrence des suites adjacentes (u_n) et (v_n) de réels compris entre x_1 et x_2 dont la limite commune sera le réel cherché.

Définissons d'abord $u_0 = x_1$, $v_0 = x_2$. Supposons u_n et v_n construits et construisons u_{n+1} et v_{n+1}. Posons $w_n = (u_n + v_n)/2$. Il y a deux possibilités

1) $f(w_n) \leq y$; on pose alors $u_{n+1} = w_n$, $v_{n+1} = v_n$;

2) $f(w_n) > y$; on pose dans ce cas $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = w_n$.

DESSIN

On montre par récurrence que $u_n \leq v_n$ pour tout n, que (u_n) est une suite croissante et que (v_n) est une suite décroissante. En plus, pour tout entier, n, on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$, de sorte que $v_n - u_n = \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. Donc (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, et elles ont une limite commune, que nous noterons x. Comme u_n et v_n sont dans $[x_1, x_2]$ pour tout n, le réel x est aussi entre x_1 et x_2.

Montrons enfin que $f(x) = y$. Pour tout entier n, on a $f(u_n) \leq y$ et $f(v_n) \geq y$ (par récurrence), de sorte que

$$y \leq \lim(f(v_n)) = f(\lim(v_n)) = f(x) = f(\lim(u_n)) = \lim(f(u_n)) \leq y$$

puisque f est continue. On a bien $y = f(x)$. ∎

Le théorème suivant permet parfois de prouver l'existence de solutions d'équations. Une version plus constructive donnant un algorithme pour trouver ces solutions est donnée dans l'appendice C (th. 36.1).

Théorème du point fixe 22.2.– *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires 22.1 à la fonction continue $x \mapsto h(x) = f(x) - x$. En effet

$$f(a) \in [a,b] \implies h(a) = f(a) - a \geq 0$$
$$f(b) \in [a,b] \implies h(b) = f(b) - b \leq 0 .$$

Il existe donc un point c qui annule h. ■

Voici quelques autres applications du théorème 22.1.

(22.3) *Soient b un nombre réel positif et n un entier naturel non nul. Alors b a une racine n-ième positive.* En d'autres termes, le polynôme $\mathrm{P}(x) = x^n - b$ a un zéro positif.

Démonstration. La fonction P est continue sur $\mathbf{R}$, vérifie $\mathrm{P}(0) \leq 0$ et

$$\mathrm{P}(b+1) = (b+1)^n - b = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k b^k - b \geq \mathrm{C}_n^1 b - b = (n-1)b \geq 0 .$$

L'image de l'intervalle $[0, b+1]$ par la fonction continue P est un intervalle, mais 0 est entre $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(b+1)$, donc c'est une valeur de la fonction P ; en d'autres termes, il existe un réel x entre 0 et $b+1$ tel que $\mathrm{P}(x) = 0$. ■

(22.4) *Soit $\mathrm{P}(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_0$ un polynôme de degré impair ($a_{2n+1} \neq 0$). Alors P a un zéro réel.*

Démonstration. On peut diviser par le coefficient du terme de degré $2n+1$ et le supposer égal à 1. En gros, l'idée est que $\mathrm{P}(x)$ est positif pour x très grand et négatif pour x très petit, et que donc P doit s'annuler quelque part. Posons

$$r = 1 + |a_{2n}| + \cdots + |a_0| \geq 1$$

de sorte que, pour $\mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}(x) - x^{2n+1}$,

$$|\mathrm{Q}(\pm r)| \leq |a_{2n}|r^{2n} + \cdots + |a_0| \leq (|a_{2n}| + \cdots + |a_0|)r^{2n} = (r-1)r^{2n} < r^{2n+1} .$$

On en déduit $\mathrm{P}(r) \geq r^{2n+1} - |\mathrm{Q}(r)| > 0$ et de même $\mathrm{P}(-r) \leq -r^{2n+1} + |\mathrm{Q}(-r)| < 0$, de sorte qu'il existe un élément x de l'intervalle $]-r, r[$ tel que $\mathrm{P}(x) = 0$. ■

Rappelons que le résultat analogue pour les polynômes de degré pair est faux : on sait bien que $x^2 + 1$ n'a aucune racine réelle.

23. Extrema des fonctions continues

Le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Le théorème suivant dit que l'image d'un intervalle *fermé et borné* par une fonction continue est un intervalle *fermé et borné.* Attention, l'image d'un intervalle borné non fermé peut très bien ne pas être bornée : penser à $f(x) = 1/x$ sur $]0,1]$. De même, l'image d'un intervalle fermé non borné peut très bien ne pas être fermée : penser à $g(x) = 1/x$ sur l'intervalle fermé $[1, +\infty[$. Voici l'énoncé du théorème.

Théorème 23.1.– *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbf{R}$. *Il existe des réels* m *et* M *tels que* $f([a,b]) = [m,\mathrm{M}]$.

Démonstration. On sait déjà grâce au théorème des valeurs intermédiaires que $f([a,b])$ est un intervalle d'extrémités $m = \inf f([a,b])$ et $\mathrm{M} = \sup f([a,b])$. Montrons tout d'abord que M est fini. Raisonnons par l'absurde, en supposant $\mathrm{M} = +\infty$. On construit par récurrence deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) de façon que f ne soit pas majorée sur l'intervalle $[u_n, v_n]$. On pose d'abord $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Supposons u_n et v_n construits et construisons u_{n+1} et v_{n+1}. Posons $w_n = (u_n + v_n)/2$; il y a deux possibilités

1) soit f est majorée sur $[u_n, w_n]$; on pose alors $u_{n+1} = w_n$, $v_{n+1} = v_n$;

2) soit f n'est pas majorée sur $[u_n, w_n]$; on pose alors $u_{n+1} = u_n$, $v_{n+1} = w_n$.

On montre par récurrence que $u_n \leq v_n$ pour tout n, que (u_n) est une suite croissante et que (v_n) est une suite décroissante, et que $v_n - u_n = \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. Il en résulte que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes ; elles ont une limite commune, que nous noterons x. Comme f n'est pas majorée sur l'intervalle $[u_n, v_n]$, il existe un point u'_n vérifiant

$$u_n \leq u'_n \leq v_n \qquad f(u'_n) \geq n. \tag{23.2}$$

Par le théorème des gendarmes, la suite (u'_n) converge vers x et la continuité de f en x entraîne que la suite $(f(u'_n))$ converge (vers $f(x)$), ce qui est en contradiction avec (23.2).

On a donc montré que M est fini. En considérant la fonction $-f$, on en déduit que m est aussi fini. Montrons que M est une valeur de f en raisonnant de nouveau par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{M} - f(x)}$$

est continue sur $[a,b]$ par la proposition 20.1, donc majorée par M' par ce qui précède. On en déduit $f(x) \leq \mathrm{M} - \frac{1}{\mathrm{M}'}$ pour tout x, ce qui contredit le fait que M est le plus petit majorant de $f([a,b])$. On montre de la même façon que m est une valeur de f. ∎

On en déduit, par exemple, que, si la fonction continue f ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle $[a,b]$, son infimum est un nombre strictement positif. Ceci est faux sur un intervalle non fermé : penser à $f(x) = x$ sur $]0,1]$.

Le résultat suivant permet de dire quand une fonction continue est une application injective.

Proposition 23.3.– *Soient* I *un intervalle et* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. Alors* f *est injective sur* I *si et seulement si* f *y est strictement monotone.*

Rappelons qu'une fonction est *croissante* si elle préserve l'ordre :

$$x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$$

elle est *strictement croissante* si

$$x < x' \implies f(x) < f(x') \ .$$

Elle est décroissante (strictement décroissante) si elle renverse les inégalités (strictes). Elle est *monotone* si elle est croissante ou décroissante. Elle est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarquons en particulier que n'importe quelle fonction strictement monotone de I dans **R** est injective. La proposition affirme donc, que, si la fonction est continue, la réciproque est vraie.

Remarquons enfin qu'une fonction f est strictement monotone si et seulement si, pour tous points $x_1 < x < x_2$ en lesquels f est définie, le point $f(x)$ est strictement entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ (*cf.* exercice 25.14).

Démonstration de la proposition. Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I. Soient x_1, x_2 et x des éléments de I tels que $x_1 < x < x_2$. Il s'agit de montrer que $f(x)$ est strictement entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Supposons par exemple $f(x_1) \leq f(x_2)$. Comme f est injective, on a $f(x_1) < f(x_2)$. Si on avait $f(x_2) \leq f(x)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous donnerait un x_3 dans $[x_1, x]$ tel que $f(x_3) = f(x_2)$, ce qui n'est pas possible puisque f est injective et que $x_3 \leq x < x_2$. On a donc $f(x) < f(x_2)$. De la même façon, on montre $f(x) > f(x_1)$ et finalement $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$. On a bien montré ce que l'on voulait, et f est strictement croissante. ∎

Il est utile de remarquer que si f est une fonction croissante continue sur un intervalle I, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne l'égalité

$$f([x,y]) \ = \ [f(x), f(y)]$$

pour tous points x et y dans I. Si f est *strictement* croissante, on a aussi

$$f(]x,y[) \ = \ ]f(x), f(y)[\ .$$

On peut préciser ces remarques comme suit.

Proposition 23.4.– *Soit* I *un intervalle de* **R** *d'extrémités* a *et* b, *et soit* f *une fonction définie sur* I, *continue et strictement monotone. Alors* $f(\mathrm{I})$ *est un intervalle de même nature que* I *(ouvert, fermé, semi-ouvert), et d'extrémités*

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad et \qquad \lim_{x\to b} f(x) \ .$$

Démonstration. On sait déjà que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle (th. 22.1); notons ses extrémités $m = \inf f(\mathrm{I})$ et $\mathrm{M} = \sup f(\mathrm{I})$. Pour fixer les idées, supposons f croissante et $a < b$, et supposons pour simplifier $m \neq -\infty$. Soit ε un réel strictement positif; par définition de la borne inférieure, il existe un élément de $f(\mathrm{I})$ qui est plus petit que $m+\varepsilon$. Il existe donc c dans I tel que $f(c) \leq m+\varepsilon$. Puisque f est croissante, on a pour tout x dans $]a,c[$ les inégalités

$$m \leq f(x) \leq f(c) \leq m+\varepsilon \ ,$$

de sorte que $|f(x)-m| \leq \varepsilon$. On a montré $\lim_{x\to a} f(x) = m$, ce qui termine la démonstration dans ce cas; les autres cas se traitent de façon similaire (exercice). ■

Le résultat suivant est fort utile : il montre que la fonction réciproque d'une fonction continue et injective sur un intervalle est encore continue.

Proposition 23.5.– *Soit* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$, *et soit* f *une fonction définie sur* I, *continue et injective. Soit* $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ *; alors la fonction réciproque* $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ *de* f *est continue. De plus* f *et* f^{-1} *sont en même temps strictement croissantes ou strictement décroissantes.*

Le graphique suivant montre comment on obtient le graphe de f^{-1} à partir de celui de f dans un repère orthonormé : c'est le symétrique par rapport à la première bissectrice.

DESSIN

Démonstration de la proposition. L'application f est une bijection de I sur J, et son application réciproque f^{-1} est définie sur J.

Comme f est continue, elle est strictement monotone (prop. 23.3). Supposons-la strictement croissante (par exemple) et montrons qu'alors, f^{-1} est aussi strictement croissante. Considérons des points y_1 et y_2 de J tels que $y_1 < y_2$. Ce sont les images de points x_1 et x_2 de I : on a $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ou, de façon équivalente, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si on avait $x_1 \geq x_2$, comme f est croissante, on aurait $f(x_1) \geq f(x_2)$, ce qui est contraire à notre hypothèse $y_1 < y_2$. Donc $x_1 < x_2$, en d'autres termes :

$$y_1 < y_2 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

ce qui veut bien dire que f^{-1} est strictement croissante.

Montrons maintenant que $g = f^{-1}$ est continue sur J. Soit y_0 un point de J ; posons $x_0 = g(y_0)$. Soit ε un réel strictement positif. Il s'agit de montrer que pour y assez proche de y_0, on a

$$x_0 - \varepsilon = g(y_0) - \varepsilon < g(y) < g(y_0) + \varepsilon = x_0 + \varepsilon \ .$$

Si $x_0 + \varepsilon$ n'est pas dans I, il est supérieur à tous les éléments de I, donc en particulier à $g(y)$. S'il est dans I, l'inégalité $g(y) < x_0 + \varepsilon$ équivaut, puisque f est strictement croissante, à $y < f(x_0 + \varepsilon)$.

De même, si $x_0 - \varepsilon$ n'est pas dans I, l'inégalité $x_0 - \varepsilon < g(y)$ est automatique. Sinon, elle équivaut à $f(x_0 - \varepsilon) < y$.

Ceci montre bien que pour y assez proche de y_0, on a $|g(y_0) - g(y)| < \varepsilon$, de sorte que g (c'est-à-dire f^{-1}) est continue sur J. ∎

24. Fonctions usuelles

Maintenant que nous avons à notre disposition suffisamment d'outils, nous allons revenir sur la définition de certaines fonctions dites « usuelles » (nous les avons déjà utilisées, mais uniquement dans les exemples).

Logarithmes et exponentielles. On recherche les fonctions *logarithmes*, c'est-à-dire les fonctions qui transforment la multiplication en addition :

(24.1) $$f(xy) = f(x) + f(y) \ .$$

Proposition 24.2.– *Pour tout réel strictement positif* $a \neq 1$ *, il existe une unique fonction strictement monotone* $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ *vérifiant*

a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

b) $\log_a(a) = 1$.

Nous admettrons cette proposition (une démonstration en est donnée dans l'appendice B). Le symbole $\log_a$ se prononce, en français, « logarithme de base a ». On a

$$\log_a a = 1 > 0 = \log_a 1 \ ,$$

de sorte que la fonction $\log_a$ est croissante si $a > 1$, décroissante si $a < 1$. L'assertion d'unicité entraîne $\log_a = -\log_{1/a}$, ce qui permet dans la plupart des démonstrations de se ramener au cas $a > 1$.

Proposition 24.3.– *Si* $b > 0$ *et* $b \neq 1$*, on a* $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ est bien définie puisque $b \neq 1$, donc $\log_a b \neq 0$; elle vérifie l'équation fonctionnelle, elle est strictement monotone, et vaut 1 en b. C'est donc la fonction $\log_b$. ∎

Proposition 24.4.– *La fonction* $\log_a$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $a>1$. Soit x_0 un point de $]0,+\infty[$. Fixons comme il se doit un $\varepsilon>0$ et déduisons-en un entier n tel que $\frac{1}{n}<\varepsilon$. On a montré en (22.3) l'existence du réel $\sqrt[n]{a}$; il vérifie $\log_a(\sqrt[n]{a})=1/n$ et $\sqrt[n]{a}>1$, puisque $a>1$. Soit x un réel strictement positif tel que

$$x_0(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-1)\leq x-x_0\leq x_0(\sqrt[n]{a}-1)\ ;$$

on a alors

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\leq\frac{x}{x_0}\leq\sqrt[n]{a}\ ,$$

d'où, comme la fonction $\log_a$ est croissante, $-1/n\leq\log_a(x/x_0)\leq 1/n$, soit encore $|\log_a(x)-\log_a(x_0)|\leq 1/n<\varepsilon$. Ceci achève la démonstration de la proposition. ■

Proposition 24.5.– a) *La fonction* $\log_a$ *est une bijection continue de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbf{R}$.

b) *Si* $a>1$, *on a*

$$\lim_{x\to 0}\log_a(x)=-\infty\qquad et\qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty\ ;$$

si $a<1$, *on a*

$$\lim_{x\to 0}\log_a(x)=+\infty\qquad et\qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=-\infty\ .$$

Démonstration. Comme $\log_a$ est continue, son image est un intervalle de $\mathbf{R}$ (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Mais cet intervalle contient tous les entiers $n=\log_a(a^n)$, donc c'est $\mathbf{R}$ tout entier. Ceci montre a), et b) résulte de la proposition 23.4. ■

Pour aider à tracer le graphe de ces fonctions, on remarquera encore que :

Proposition 24.6.– *On a* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0$.

Démonstration. Supposons $a>1$ (le cas où $a<1$ s'en déduit facilement et est laissé en exercice aux lecteurs). Rappelons d'abord que la suite $(\dfrac{a^n}{n+1})$ tend vers $+\infty$ (voir le chapitre II, § 14.4). Fixons maintenant un réel strictement positif ε et montrons qu'il existe un réel M tel que, si $x\geq \mathrm{M}$, on a $\dfrac{\log_a x}{x}<\varepsilon$. On peut trouver un entier naturel N tel que

$$n\geq \mathrm{N}\implies\frac{n+1}{a^n}<\varepsilon\ .$$

Posons $\mathrm{M}=a^{\mathrm{N}}$. Si $x>\mathrm{M}$, il existe un entier n tel que $a^n\leq x\leq a^{n+1}$ et n est plus grand que N ; on a $\log_a x\leq n+1$, de sorte que

$$0\leq\frac{\log_a x}{x}\leq\frac{n+1}{a^n}<\varepsilon\ ,$$

ce que nous voulions démontrer. ■

La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone, de sorte qu'elle possède une fonction réciproque continue appelée « exponentielle de base a » et notée $\exp_a$, définie sur tout $\mathbf{R}$ et prenant toutes les valeurs strictement positives. Rappelons que si n est un entier, l'équation fonctionnelle nous donne

$$\log_a a^n = n \log_a a = n \ ,$$

de sorte que $\exp_a n = a^n$, ce qui justifie la *notation* $\exp_a x = a^x$. Le réel a^x est donc l'*unique* réel strictement positif qui vérifie

$$\log_a a^x = x \ .$$

On pose aussi, pour tout réel x,

$$1^x = 1 \ .$$

Proposition 24.7.– *Soit a un réel strictement positif ; on a, pour tous réels x et y, les relations*

$$a^0 = 1 \quad , \qquad a^{x+y} = a^x a^y \quad , \qquad (a^x)^y = a^{xy} \ .$$

Si a est différent de 1, la fonction $\exp_a$ est une bijection continue de $\mathbf{R}$ sur $]0,+\infty[$ (strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $a < 1$).

Démonstration. Seules les trois relations sont à démontrer ; si $a = 1$, elles sont évidentes, et l'on peut supposer $a \neq 1$. La première vient de $\log_a 1 = 0$, la deuxième de l'identité

$$\log_a(a^x a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y = x + y \ .$$

La démonstration de la dernière égalité est un peu plus délicate ; si $x = 0$, elle est évidente et l'on peut supposer $x \neq 0$. On a vu dans 24.3 que

$$\log_a z = (\log_a b)(\log_b z) \ ,$$

pour $b \neq 1$, ce qu'on applique ici avec $z = b^y$, pour trouver

$$\log_a b^y = (\log_a b)(\log_b b^y) = y \log_a b \ .$$

On prend maintenant $b = a^x$ (qui est bien différent de 1 puisque $x \neq 0$) :

$$\log_a (a^x)^y = y \log_a(a^x) = xy \ ,$$

soit $(a^x)^y = a^{xy}$. ■

(24.8) Pour tout réel $a > 0$ fixé, la fonction $f_a :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ qui à x associe x^a est strictement croissante. En effet, si $0 < x_1 < x_2$, on a $x_2/x_1 > 1$; la fonction $\exp_{x_2/x_1}$ est croissante par la proposition 24.7, d'où

$$\Big(\frac{x_2}{x_1}\Big)^a = \exp_{x_2/x_1}(a) > \exp_{x_2/x_1}(0) = 1 \ .$$

On a donc $x_2^a > x_1^a$. Pour $a < 0$, on montre de la même façon que f_a est strictement décroissante. La proposition 24.7 montre que $f_a \circ f_{1/a} = f_{1/a} \circ f_a$ est l'identité, de sorte que f_a est une bijection. Si on écrit

$$f_a(x) = 2^{a \log_2 x} \ ,$$

on voit que f_a est continue comme composée de deux fonctions continues.

On peut maintenant tracer les graphes de ces fonctions.

DESSIN

Fonctions trigonométriques. A un angle, c'est-à-dire à deux vecteurs de même origine dans le plan, vous savez associer deux nombres réels, son sinus et son cosinus.

Dans le cas d'un angle aigu (comme sur la figure), on a $\sin \hat{\mathrm{A}} = \frac{b}{c}$, et $\cos \hat{\mathrm{A}} = \frac{a}{c}$.

DESSIN

Les *fonctions* sin et cos sont des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire qu'elles se calculent, non pas sur des *angles*, mais sur des *nombres :* on veut parler de $\sin x$ (où $x \in \mathbf{R}$) et non pas de $\sin \hat{\mathrm{A}}$ (où $\hat{\mathrm{A}}$ représente un couple de vecteurs). C'est beaucoup plus délicat.

Une stratégie possible est de définir la longueur d'un arc de cercle. On considère ensuite un arc de longueur x sur un cercle de rayon 1 et on définit $\cos x$ et $\sin x$ comme le cosinus et le sinus d'un angle au centre $\hat{\mathrm{A}}$ « interceptant » l'arc en question.

La longueur de la circonférence d'un cercle de rayon 1 est alors un nombre réel qu'on appelle 2π. Les fonctions cosinus et sinus sont définies comme des fonctions périodiques de période 2π : on ne sait pas combien de fois on a fait le tour de la circonférence pour aller de B à C quand on calcule $\cos \hat{\mathrm{A}}$ et $\sin \hat{\mathrm{A}}$.

Pour les angles, on démontre facilement les formules d'addition ($\cos(\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}})$, etc). Il est alors naturel de demander que nos fonctions vérifient les mêmes formules.

En résumé, nous admettrons :

Résumé 24.9.– *Il existe une fonction de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$, *notée* sin, *et un nombre réel appelé* π *tels que*

a) sin *est impaire* ($\sin(-x) = -\sin x$) *périodique de période* 2π, *strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *et* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$;

b) *on a* $|\sin x| \leq |x|$ *pour tout* x ;

et, si l'on pose $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$;

c) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ *pour tous réels* x *et* y ;

d) *si* $x \in [0, \pi/2[$, *on a* $x \leq \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Remarquons que l'on a alors $\sin 0 = 0$ (par imparité ou b), $\sin(-\pi) = \sin \pi$ par périodicité, mais aussi $\sin(-\pi) = -\sin \pi$ par imparité, de sorte que $\sin \pi = 0$. De l'imparité de sin, on déduit encore que cos est paire ($\cos(-x) = \cos x$). La formule d'addition donne enfin $\sin(\pi - x) = \sin x$ et

$$1 = \sin(x + \frac{\pi}{2} - x) = \sin x \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

pour tout x.

DESSIN

Proposition 24.10.– *La fonction* sin *est continue sur* $\mathbf{R}$. *Elle définit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1, 1]$.

Démonstration. Fixons un réel x_0 et montrons, grâce aux propriétés énoncées ci-dessus, que sin est continue en x_0. Remarquons d'abord que la formule d'addition permet de démontrer

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\Big(\frac{x - x_0}{2}\Big) \cos\Big(\frac{x + x_0}{2}\Big) \ ,$$

de sorte que

$$|\sin x - \sin x_0| \le 2 |\sin\Big(\frac{x - x_0}{2}\Big)| \le 2 |\frac{x - x_0}{2}|$$

par b). Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$|x - x_0| < \varepsilon \implies |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

et sin est donc continue en x_0. Comme on a admis 24.9 qu'elle était strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on déduit du théorème 22.1 qu'elle définit une bijection de cet intervalle sur son image. Comme on a vu que $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, cette image est bien $[-1, 1]$. ∎

(24.11) On en déduit que la fonction cos est continue sur $\mathbf{R}$ et que la fonction tangente $\mathrm{tg} = \sin / \cos$ est définie et continue sur $\mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

La fonction tangente est impaire. Elle est périodique de période π. De plus, elle est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient d'une fonction strictement croissante par une fonction strictement décroissante positive (la fonction cosinus). Elle est donc strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et, par périodicité, sur chacun des intervalles où elle est définie. On a de plus évidemment $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \mathrm{tg}\, x = +\infty$, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \mathrm{tg}\, x = -\infty$. En particulier, la restriction de tg à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection continue de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

De ces remarques, de la proposition 24.10 et des propriétés de symétrie énoncées ci-dessus, on déduit sans mal la forme du graphe des fonctions sinus, cosinus et tangente.

DESSIN

Grâce à la proposition 24.10, on sait que la fonction sinus, restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a une fonction réciproque continue et strictement croissante, notée $\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dont voici le graphe.

DESSIN

De même, la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ a une application réciproque, continue et strictement croissante, que l'on note $\mathrm{Arctg} : \mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et qui vérifie $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{Arctg}\, x = \pm\frac{\pi}{2}$; son graphe est représenté ci-dessous.

DESSIN

EXERCICES

(25.1) Montrer, en utilisant la définition de la continuité d'une fonction en un point que

a) la fonction $f(x) = x^3$ est continue en 0, en 1 ;

b) la fonction $f(x) = 1/x$ est continue en 2.

(25.2) Soit f une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un réel A tel que, pour tous x et y de D, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{A}|x - y| .$$

Montrer que f est continue sur D.

(25.3) Si f et g sont des fonctions continues sur D, montrer que la fonction $\sup(f, g)$ définie par $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$ est continue. Retrouver ainsi le fait que si f est continue sur D, alors $|f|$ l'est aussi.

(25.4) Montrer qu'une partie J de $\mathbf{R}$ est un intervalle si et seulement si quand elle contient des réels z_1 et z_2 tels que $z_1 < z_2$, elle contient tous les réels compris entre z_1 et z_2.

(25.5) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$. Si λ et μ sont des réels strictement positifs, montrer qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que

$$\lambda f(a) - (\lambda + \mu) f(c) + \mu f(b) = 0 .$$

(25.6) Où la fonction $g \circ f$ est-elle définie si $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$?

(25.7) Soit I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$. Construire une application continue de $]0, 1[$ dans $\mathbf{R}$ dont l'image soit I.

(25.8) Soit $\mathrm{P} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction polynôme. Montrer que $|\mathrm{P}|$ atteint son infimum : autrement dit, qu'il existe un nombre réel x_0 tel que $|\mathrm{P}(x)| \geq |\mathrm{P}(x_0)|$ pour tout réel x.

(25.9) La fonction $f(x) = ax + b$ a-t-elle une application réciproque ? Si oui, quelle est cette application réciproque ?

(25.10) Montrer que la fonction $f(x)=x^3$ possède une application réciproque continue sur $\mathbf{R}$. Que peut-on dire de la fonction $g(x)=x^2$?

(25.11) Soit n un entier ≥ 2. Montrer qu'il existe au moins deux réels x pour lesquels on a $x^n=n^x$. Trouver une approximation à $0,1$ près d'un réel x vérifiant $x^3=3^x$ et $x<3$.

(25.12) Soit x un réel strictement positif. On définit une suite $(u_n(x))$ en posant $u_(x)=2^n(x^{1/2^n}-1)$, pour tout $n\geq 0$.

a) Lorsque $x\geq 1$, montrer que la suite $(u_n(x))$ est décroissante, et qu'elle converge vers un réel positif, que l'on note $\ell(x)$ (puisqu'il dépend de x).

b) Lorsque $0<x<1$, montrer que la suite $(u_n(x))$ converge vers $-1/\ell(x)$.

On définit ainsi une fonction $\ell :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ en associant à x le réel $\ell(x)$.

c) Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$1-\frac{1}{x}\leq \ell(x)\leq x-1 .$$

d) Montrer que ℓ est une fonction strictement croissante qui vérifie, pour tous $x,y>0$, l'équation $\ell(xy)=\ell(x)+\ell(y)$.

e) Montrer que ℓ est continue, que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, et qu'elle prend la valeur 1 en un unique réel $a>1$. C'est donc la fonction $\log_a$ (c'est en fait la fonction « logarithme népérien », qui sera définie dans le chapitre suivant).

(25.13) a) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.

b) Soit $\mathrm{P}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction polynomiale de degré n. Montrer qu'il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout réel x,

$$|\mathrm{P}(x)|\leq \mathrm{C}(|x|^n+1) .$$

(25.14) Soit f une fonction de domaine de définition D. On suppose que pour tous points x,y,z de D tels que $x<y<z$, le point $f(y)$ est strictement entre $f(x)$ et $f(z)$. On veut montrer que f est strictement monotone.

On fixe deux points a et b de D et on suppose pour fixer les idées $f(a)<f(b)$.

a) Soient x et y des points de D tels que $a\leq x<y\leq b$. Montrer que $f(x)<f(y)$.

b) Soit x un point de D tel que $x<a$. Montrer que $f(x)<f(a)$.

c) Soient x et y des points de D tels que $x<y\leq a$. Montrer que $f(x)<f(y)$.

d) Montrer que f est strictement croissante.

(25.15) Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f:\mathrm{I}\to\mathbf{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

(25.16) Soit f une fonction continue définie et strictement décroissante sur un intervalle $[a,b]$. On suppose le graphe de f dans un repère orthonormé symétrique par rapport à la première bissectrice. Que peut-on dire de f^{-1} ? Exemple : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur $[1/2,2]$.

(25.17) Trouver, si elles existent, les limites des fonctions suivantes quand x tend vers 0 :

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\quad,\quad \frac{x+2}{x^2-1}\quad,\quad \frac{x-\cos x}{x+\cos x}\quad,\quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} .$$

(25.18) La fonction $x\mapsto \sin\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ a-t-elle une limite quand x tend vers 0 ? Même question pour la fonction $x\mapsto x\sin\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.

(25.19) Pour tout réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}\ ,\quad \lim_{x\to 0} x\log_a x\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(x)}{x}\ ,\quad \lim_{x\to 0} x\mathrm{E}(\frac{1}{x})\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{E}(\frac{1}{x})\ .$$

(25.20) Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant chacune des « équations fonctionnelles » ci-dessous.

a) $\forall x,y\in\mathbf{R}\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)$.

b) $\forall x,y\in\mathbf{R}\qquad f(x+y)=f(x)f(y)$.

c) $\forall x,y\in\,]0,+\infty[\qquad f(xy)=f(x)+f(y)$.

d) $\forall x,y\in\mathbf{R}\qquad f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)+f(y)$.

e) $\forall x,y\in\mathbf{R}\qquad f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$.

(25.21) Pour tout réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. Les applications suivantes, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, sont-elles continues ?

a) $f(x)=\mathrm{E}(x)+(x-\mathrm{E}(x))^2$.

b) $f(x)=x+\sqrt{x-\mathrm{E}(x)}$.

c) $f(x)=x^2$ si x est rationnel, et $f(x)=x$ sinon.

(25.22) Soit $f:\,]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

(25.23) a) Soient x un réel et ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel k vérifiant $2^k\varepsilon>1$. L'entier k étant fixé, monter qu'il existe un élément α de $\mathbf{Z}$ tel que $x<\dfrac{\alpha}{2^k}<x+\varepsilon$.

b) Soient D le sous-ensemble $\{\ \dfrac{\alpha}{2^k}\mid k\in\mathbf{N}\ ,\ \alpha\in\mathbf{Z}\ \}$ de $\mathbf{R}$ et x un réel. Montrer qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers x.

c) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que si f s'annule sur D, alors f s'annule sur $\mathbf{R}$ tout entier.

(25.24) Soit $f:[0,+\infty[\,\to[0,+\infty[$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x,y\in\mathbf{R}\qquad f(x+y)\le f(x)+f(y)$$

Soit a un réel positif. Montrer que si α est un réel strictement positif, il existe un élément k de $\mathbf{N}$ vérifiant $\dfrac{a}{2^k}<\alpha$. En déduire que f est bornée sur l'intervalle $[0,a]$.

(25.25) Soient $f:\,]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ une fonction continue et l un réel tels que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=l\ .$$

Le but de cet exercice est de démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l\ .$$

a) Soient A et x des réels vérifiant $x>\mathrm{A}\ge 0$. Montrer que x s'écrit $x=y+n$ avec y réel, $\mathrm{A}<y\le\mathrm{A}+1$ et $n\in\mathbf{N}$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel $\mathrm{A}\ge 0$ tel que, pour tout $x>\mathrm{A}$, il existe y dans $]\mathrm{A},\mathrm{A}+1]$ et n dans $\mathbf{N}$ tels que $x=n+y$ et $|f(x)-f(y)-nl|<n\varepsilon/2$.

c) Montrer que l'on a alors

$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|f(y)|}{n}+\frac{y|l|}{n}\ .$$

d) En déduire qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n\geq \mathrm{N}$, on ait $|\dfrac{f(x)}{x}-l|<\varepsilon$.

e) Exprimer en fonction de A et N un réel B vérifiant

$$x>\mathrm{B}\quad\Longrightarrow\quad|\frac{f(x)}{x}-l|<\varepsilon\ ,$$

puis conclure.

IV. DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS

26. Définition de la dérivabilité

Vous avez tous déjà rencontré la notion de fonction dérivable. Le premier point de vue est celui de la cinématique : la variable t représente le temps, et $f(t)$ la distance parcourue par un point mobile qui se déplace toujours dans la même direction, disons sur une droite pour simplifier. La *vitesse moyenne* entre deux instants t_0 et t_1 est le rapport entre la distance parcourue et le temps passé, c'est-à-dire

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} .$$

Lorsque t_1 devient très proche de t_0, la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t_1 « tend vers » ce que l'on appelle la *vitesse instantanée* au temps t_0 ; c'est le nombre qu'indique le compteur de vitesse de votre voiture à un instant donné.

Dans l'autre point de vue, on essaye de construire, en chaque point P_0 du graphe d'une fonction f, une droite « tangente » à ce graphe en P_0. On peut procéder de la façon suivante : on considére des droites sécantes au graphe, passant par P_0 et un point P_1 « voisin » de P_0, et on fait « tendre » P_1 vers P_0 ; la tangente sera alors la « limite » de ces sécantes. Si x_0 est l'abcisse de P_0, les coordonnées de P_0 sont $(x_0, f(x_0))$; tout autre point P_1 du graphe de f a pour coordonnées $(x_1, f(x_1))$ avec $x_1 \neq x_0$, et la droite $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ a pour équation

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) + f(x_0)$$

(on vérifie directement que la droite définie par cette équation passe bien par P_0 et P_1).

DESSIN

Dans chacun de ces deux points de vue, on s'intéresse à la limite du rapport

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \ ,$$

qu'on appelle un *taux d'accroissement*, lorsque x_1 tend vers x_0 ; on est donc amené à énoncer la définition suivante.

Définition 26.1.– *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0. On dit que f est* dérivable *en x_0 si la fonction*

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite lorsque x tend vers x_0 ; si c'est le cas, on note cette limite $f'(x_0)$ et on l'appelle la dérivée *de la fonction f en x_0.*

Comme d'habitude, on dit que f est *dérivable sur* un ensemble D si f est définie et dérivable en tout point de D ; on peut alors définir une fonction $f' : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ qui vaut $f'(x)$ en chaque point x de D.

(26.2) Supposons f dérivable en x_0 et définissons une fonction ε au voisinage de x_0 en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \qquad \text{pour } x \neq x_0 \ , \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x_0) = 0 \ .$$

Par définition, cette fonction ε est continue en x_0. On peut écrire

(26.3) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \ .$$

On dit qu'on a fait un *développement limité de f à l'ordre 1 en x_0* : on a approximé « au premier ordre » $f(x)$ par la fonction affine

$$x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \ .$$

On définit la *tangente* au graphe de f au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ comme la droite d'équation

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \ .$$

On dit que $f'(x_0)$ est la *pente* de la tangente : une dérivée strictement positive correspond à une courbe « qui monte », une dérivée strictement négative à une courbe « qui descend ». Plus la dérivée est grande, plus la courbe « monte vite ». Nous préciserons ces constatations intuitives plus tard.

La première remarque à faire est qu'une fonction dérivable en un point est *continue* en ce point : il résulte immédiatement du développement limité (26.3) que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0, et c'est la définition de la continuité de f en x_0. On verra dans un exemple ci-dessous que la réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions continues qui ne sont pas dérivables.

Exemples 26.4. 1) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Il s'agit de vérifier que la limite du taux d'accroissement existe en tout point x_0. Pour tout x différent de x_0, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a \ ;$$

la limite de cette expression constante quand x tend vers x_0 est a. On a donc montré

$$f'(x) = a$$

pour tout réel x.

2) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Il s'agit de vérifier que la limite du taux d'accroissement existe en tout point x_0. Pour tout x différent de x_0, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \ ;$$

la limite de cette expression quand x tend vers x_0 est $2x_0$. On a donc montré

$$f'(x) = 2x$$

pour tout réel x. La tangente à la parabole $y = x^2$ au point (x_0, x_0^2) est la droite d'équation $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = x_0(2x - x_0)$.

3) La fonction $f : \mathbf{R}-\{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ est dérivable sur son domaine de définition. Il s'agit de vérifier que la limite du taux d'accroissement existe en tout point $x_0 \neq 0$. Pour tout x différent de x_0, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{x_0 - x}{xx_0(x - x_0)} = -\frac{1}{xx_0} \ .$$

La limite de cette expression quand x tend vers x_0 étant $-1/x_0^2$, on a montré

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

pour tout réel x non nul.

4) La fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Il s'agit de vérifier que la limite du taux d'accroissement existe en tout point $x_0 > 0$. Pour tout $x > 0$ différent de x_0, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \ .$$

La limite de cette expression quand x tend vers x_0 est $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, on a donc montré

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pour tout réel x strictement positif.

5) **Dérivée de la fonction sinus** : d'après les propriétés de cette fonction que l'on a admises en 24.9, on a pour tout $x \in [0, \pi/2[$,

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} ,$$

d'où

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

pour $x \neq 0$. Ces inégalités restent encore vraies pour $x \in [\pi/2, \pi/2] - \{0\}$, puisque les fonctions de x qui y apparaissent sont toutes paires. Comme $\cos$ est continue en 0 (*cf.* (24.11)), on en déduit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ,$$

ce qui signifie exactement que $\sin$ est dérivable en 0, de dérivée 1. On écrit alors, comme dans la démonstration de la proposition 24.10, pour $x \neq x_0$,

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin(\frac{x - x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}} \cos(\frac{x + x_0}{2}) .$$

De nouveau par la continuité de $\cos$, la limite de ce taux d'accroissement lorsque x tend vers x_0 est $\cos x$. La dérivée de $\sin$ est donc $\cos$.

6) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 : le taux d'accroissement est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} ,$$

qui vaut 1 si $x > 0$, et -1 si $x < 0$; il n'a pas de limite lorsque x tend vers 0. Voici donc un exemple de fonction continue qui n'est pas dérivable en un point. On peut même construire des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point !

Intuitivement, une fonction est continue si on peut tracer son graphe « sans lever son stylo » ; dans la même optique, on peut dire qu'une fonction est dérivable si on peut tracer son graphe « sans arrêter son stylo ». Il est facile de se rendre compte des limites de ces interprétations intuitives en se demandant pour quelles valeurs de l'entier positif n la fonction $x \mapsto x^n \sin(1/x)$, prolongée par continutié en 0, est dérivable en 0 (au fait, quelle est la réponse ?).

27. Opérations sur les fonctions dérivables

Comme pour la convergence des suites, ou la continuité des fonctions, il est rare dans la pratique que l'on revienne à la définition pour montrer qu'une fonction est dérivable. On utilise plutôt des théorèmes généraux, que nous allons maintenant démontrer.

Proposition 27.1.– *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0.*

a) *Pour tout réel* a, *la fonction* af *est dérivable en* x_0, *de dérivée* $af'(x_0)$.

b) *La fonction* $f+g$ *est dérivable en* x_0, *de dérivée* $f'(x_0)+g'(x_0)$.

c) *La fonction* fg *est dérivable en* x_0, *de dérivée* $f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Démonstration. Nous laisserons les démonstrations de a) (qui est un cas particulier de c)) et de b) aux lecteurs. Montrons c); il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

lorsque x tend vers x_0. On l'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \ .\end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est un produit de deux fonctions de x, qui tendent respectivement vers $f'(x_0)$ (puisque f est dérivable en x_0) et $g(x_0)$ (puisque g est dérivable, donc *continue*), en x_0 ; sa limite est donc le produit des limites, à savoir $f'(x_0)g(x_0)$. Le second terme de la somme a comme limite $f(x_0)g'(x_0)$; le tout tend donc vers $f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$, ce qui montre c). ∎

Exemple 27.2. Pour tout entier n strictement positif, la fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $f(x)=x^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(x)=nx^{n-1}$. Démontrons-le par récurrence sur n. La cas $n=1$ a été traité dans l'exemple 26.4.1); supposons connue la dérivée de la fonction $x\mapsto x^{n-1}$. On écrit $f(x)=x^n$ comme le produit de x par x^{n-1} ; la proposition 27.1 donne

$$f'(x)=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)x^{n-2}=nx^{n-1} \ ,$$

ce qui démontre la propriété au rang n.

Théorème 27.3.– *Soient* f *et* g *des fonctions. On suppose que* f *est définie au voisinage de* x_0 *et dérivable en* x_0. *On suppose que* g *est définie au voisinage de* $f(x_0)$ *et dérivable en* $f(x_0)$. *Alors* $g\circ f$ *est définie au voisinage de* x_0 *et dérivable en* x_0, *de dérivée*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0) \ .$$

Démonstration. Il résulte de la remarque 20.5 que $g\circ f$ est définie au voisinage de x_0. Il s'agit maintenant d'étudier la limite du taux d'accroissement

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}$$

lorsque x tend vers x_0. Ecrivons comme en (26.2) un développement limité de g au premier ordre en y_0 :

$$g(y)=g(y_0)+(y-y_0)g'(y_0)+(y-y_0)\varepsilon(y) \ .$$

On a

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (f(x) - f(x_0))g'(y_0) + (f(x) - f(x_0))\varepsilon(f(x))$$

pour tout x proche de x_0, de sorte que

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, (g'(y_0) + \varepsilon(f(x))) \ .$$

La limite de ce taux d'accroissement lorsque x tend vers x_0 est bien $f'(x_0)g'(y_0)$, ce qui montre le théorème. ■

Exemples 27.4. 1) **Dérivée de la fonction cosinus** : comme $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, on a par l'exemple 26.4.5), $(\cos)'x = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$. La dérivée de $\cos$ est $-\sin$.

2) La dérivée de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^2)$ est $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.

Corollaire 27.5.– *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction f/g est définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0, de dérivée*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \ .$$

Démonstration. Il résulte de la remarque 20.2 que f/g est définie au voisinage de x_0. On peut voir la fonction $1/g$ comme la composée de g avec la fonction $y \mapsto 1/y$, qui est par hypothèse définie au voisinage de $g(x_0)$. Le théorème 27.3 et l'exemple 26.4.3) entraînent

$$(1/g)'(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2} \, g'(x_0) \ .$$

On applique alors la formule qui donne la dérivée d'un produit (prop. 27.1.c)

$$\Big(f \, \frac{1}{g}\Big)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\Big) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \ ,$$

ce qui termine la démonstration. ■

Exemples 27.6. 1) Pour tout entier n non nul, la fonction $f : \mathbf{R}-\{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}-\{0\}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$. Le cas $n > 0$ a été traité dans l'exemple 27.2. Lorsque $n < 0$, on écrit $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ et on applique le corollaire, qui donne

$$f'(x) = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1} \ .$$

2) Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en un point x_0 de D et n un entier non nul. Si $f(x_0) \neq 0$, la fonction $f^n : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$, définie par $f^n(x) = f(x)^n$, est dérivable en x_0 ; en

effet, c'est la composée de f et de la fonction $y \mapsto y^n$, dont on a calculé la dérivée dans l'exemple 27.2. Le théorème 27.3 entraîne

$$(f^n)'(x_0) = nf(x_0)^{n-1}f'(x_0) .$$

3) **Dérivée de la fonction tangente** : la fonction tangente est dérivable en tout point de son domaine de définition (c'est-à-dire les points où le cosinus ne s'annule pas, c'est-à-dire encore les points qui ne sont pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$). Sa dérivée est donnée par

$$(\mathrm{tg})'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\, x .$$

Proposition 27.7.– *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$, *et soit* f *une fonction définie sur* I, *continue et strictement monotone. On sait (prop. 23.5) que* $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$ *est un intervalle ouvert et que* f *admet une fonction réciproque* $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ *continue. Si* f *est dérivable en* x_0 *de dérivée* non nulle, f^{-1} *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$, *et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

On verra plus tard (lemme 29.2) qu'une condition *suffisante* pour que f soit strictement monotone est qu'elle soit dérivable sur I, et que sa dérivée soit partout non nulle.

Démonstration de la proposition. Posons $g = f^{-1}$; il s'agit d'étudier la limite du taux d'accroissement

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

lorsque y tend vers y_0. Par définition de g, on a $y = f(g(y))$; on peut donc écrire

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} .$$

C'est donc l'inverse du taux d'accroissement de f entre $g(y)$ et $g(y_0)$. Puisque g est continue en y_0 (prop. 23.5), $g(y)$ tend vers $g(y_0) = x_0$ lorsque y tend vers y_0, de sorte que le taux d'accroissement de f entre $g(y)$ et x_0 tend vers $f'(x_0)$. Cela démontre la proposition. ∎

On peut donner l'interprétation graphique suivante de ce théorème. Rappelons que dans un repère orthonormé, le graphe de la réciproque de f est le symétrique du graphe de f par rapport à la « première bissectrice » ; on cherche la « pente » de la tangente au graphe de f^{-1} en le point $(y_0, f^{-1}(y_0)) = (y_0, x_0)$. Intuitivement, cette tangente est le symétrique de la tangente au graphe de f en le point (x_0, y_0), dont la pente est $f'(x_0)$. Or le symétrique d'une droite par rapport à la première bissectrice est une droite de pente inverse, ici $1/f'(x_0)$.

DESSIN

Exemples 27.8. 1) Pour tout entier n non nul, la fonction $g :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est la réciproque de la fonction $f : x \mapsto x^n$ de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$; la proposition 27.7 donne donc, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{ng(x)^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} .$$

Ce résultat se généralise à la fonction $g(x) = x^r$, où $r = p/q$ est un *rationnel*, qui est la puissance $p$ième de la fonction $x \mapsto x^{1/q}$. L'exemple 27.6.1) et ce qui précède donnent

$$g'(x) = p\big(x^{1/q}\big)^{p-1}\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1} ,$$

pour tout $x > 0$. Nous verrons dans la proposition 30.6 que cette formule reste valable pour r réel quelconque.

2) On peut ainsi calculer les dérivées de fonctions que l'on ne peut pas exprimer à l'aide de fonctions usuelles : par exemple, la fonction $x \mapsto x^5 + x + 1$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, d'image $]1,+\infty[$; elle admet donc une réciproque g définie sur $]1,+\infty[$. On a $g(3) = 1$ et $g'(3) = 1/f'(1) = 1/6$.

3) D'après ce que l'on a admis en 24.9, la fonction $\cos$, dérivée de $\sin$, ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La fonction $\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est donc dérivable sur $]-1,1[$, et, si $y = \sin x$, le théorème 27.3 donne, puisque $\cos x > 0$,

$$(\mathrm{Arcsin})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

On a vu dans l'exemple 27.6.3) que la dérivée de tg ne s'annule en aucun point. Sa fonction réciproque $\mathrm{Arctg} : \mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est donc dérivable sur $\mathbf{R}$, et, si $y = \mathrm{tg}\, x$,

$$(\mathrm{Arctg})'(y) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2} .$$

28. Théorème des accroissements finis

Ce théorème est un résultat fondamental d'analyse. Il permet de contrôler les variations d'une fonction par l'étude de sa dérivée.

Lemme 28.1.– *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* $[a,b]$. *Si* f *atteint son maximum ou son minimum en un point* c *de* $]a,b[$, *et que* f *est dérivable en* c, *on a* $f'(c)=0$.

Il est clair que la conclusion du lemme ne subsiste pas si l'extremum est atteint en une extrémité de l'intervalle : la fonction $x \mapsto x$ atteint son maximum sur l'intervalle $[0,1]$ en 1, mais sa dérivée n'y est pas nulle. De même, rien n'oblige la fonction en général à être dérivable en un extremum : la fonction $x \mapsto |x|$ atteint son minimum sur l'intervalle $]-1,1[$ en 0, mais n'y est pas dérivable.

Démonstration du lemme. Supposons par exemple que f atteigne un maximum en c (si c'est un minimum, il suffit de considérer la fonction $-f$). On a alors $f(x) \leq f(c)$ pour tout x dans $[a,b]$. On en déduit que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad \text{est positif si} \quad x<c\ ,$$

donc aussi sa limite $f'(c)$ quand x tend vers c (th. 21.6.d)). De même,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad \text{est négatif si} \quad x>c\ ,$$

donc aussi sa limite $f'(c)$ quand x tend vers c. Cela montre que $f'(c)$ est nul, d'où le lemme. ∎

Michel Rolle était un mathématicien français (1652–1719) ; son lemme date de 1691.

Lemme de Rolle 28.2.– *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$, *et vérifiant* $f(a)=f(b)$. *Il existe un point* c *de* $]a,b[$ *tel que* $f'(c)=0$.

Démonstration. D'après le théorème 23.1, la fonction continue f atteint son maximum M et son minimum m sur l'intervalle $[a,b]$. Si $\mathrm{M}=m$, la fonction f est constante sur $[a,b]$ et sa dérivée est nulle sur $]a,b[$: n'importe quel point c convient. Si $\mathrm{M}>m$, l'un des points M ou m, par exemple M, est distinct de $f(a)$, et tout point c en lequel f vaut M est distinct de a et de b. Le lemme précédent entraîne $f'(c)=0$. ∎

L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante : si une fonction dérivable prend la même valeur en deux points distincts, son graphe admet au moins une tangente horizontale entre ces deux points.

DESSIN

Le théorème suivant est une généralisation du lemme de Rolle : géométriquement, il signifie qu'il existe toujours une tangente parallèle à une corde du graphe d'une fonction dérivable.

DESSIN

Théorème des accroissements finis 28.3.– *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$ *. Il existe un point* c *de* $]a,b[$ *tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ .$$

Démonstration. L'équation de la corde joignant les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ du graphe de f est

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\ .$$

L'astuce est de considérer la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ qui mesure la différence entre le graphe et la corde. Elle vaut 0 en a et en b par construction ; le lemme de Rolle entraîne que sa dérivée

$$f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

s'annule en un point c de $]a, b[$, ce qui montre le théorème. ■

Corollaire (inégalité des accroissements finis) 28.4.– *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *On suppose qu'il existe un réel* M *tel que* $|f'(x)| \leq \mathrm{M}$ *pour tout* x *dans* $]a, b[$. *On a*

$$|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}(b - a) \ .$$

Démonstration. Cela découle du théorème, puisque $|f'(c)| \leq \mathrm{M}$. ■

29. Applications

Nous allons maintenant préciser la relation déjà évoquée entre signe de la dérivée et croissance ou décroissance de la fonction. On peut commencer par remarquer que si une fonction f est *croissante*, ses taux d'accroissements sont tous *positifs*. Si f est dérivable en un point, sa dérivée y est donc positive. Le théorème suivant montre que la réciproque est vraie.

Proposition 29.1.– *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *et dérivable sur l'intervalle ouvert* J *de mêmes extrémités que* I.

a) *Pour que* f *soit croissante sur* I, *il faut et il suffit que* $f'(x)$ *soit positif pour tout* x *dans* J.

b) *Pour que* f *soit décroissante sur* I, *il faut et il suffit que* $f'(x)$ *soit négatif pour tout* x *dans* J.

c) *Pour que* f *soit constante sur* I, *il faut et il suffit que* $f'(x)$ *soit nul pour tout* x *dans* J.

Démonstration. Montrons a) ; on a déjà remarqué que la dérivée d'une fonction croissante dérivable est positive. Inversement, supposons $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ dérivable de dérivée positive ; si x_1 et x_2 sont des points de I, avec $x_1 < x_2$, la fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ (puisque I est un intervalle), dérivable sur $]x_1, x_2[$. Le théorème des acroissements finis entraîne qu'il existe $c \in \,]x_1, x_2[$ tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \ ;$$

par hypothèse, $f'(c)$ est positif, donc aussi $f(x_2) - f(x_1)$. Ceci prouve que f est croissante.

Le point b) découle de a) appliqué à la fonction $-f$, le point c) de a) et b), ou encore de l'inégalité des accroissements finis (en prenant $\mathrm{M} = 0$). ■

Insistons sur le fait que la proposition précédente ne s'applique qu'aux fonctions définies sur un *intervalle.* Par exemple, la fonction $f : \mathbf{R}-\{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = -1/x$ est dérivable, et sa dérivée est partout strictement positive, mais elle n'est pas croissante, puisque $f(1) = -1 < f(-1)$.

Il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée s'annule (penser à la fonction $x \mapsto x^3$). Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 29.2.– *Soit f une fonction continue sur un intervalle* I *et dérivable sur l'intervalle ouvert* J *de mêmes extrémités que* I.

a) *Si $f'(x) > 0$ pour tout x dans* J, *la fonction f est strictement croissante sur* I.

b) *Si $f'(x) < 0$ pour tout x dans* J, *la fonction f est strictement décroissante sur* I.

c) *Si $f'(x) \neq 0$ pour tout x dans* J, *la fonction f est strictement monotone sur* I.

Démonstration. Si x_1 et x_2 sont des points de I, avec $x_1 < x_2$, la fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ (puisque I est un intervalle), dérivable sur $]x_1, x_2[$. Le théorème des acroissements finis entraîne qu'il existe c dans $]x_1, x_2[$, donc dans J, tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) .$$

Sous les hypothèses de a), $f'(c)$ est strictement positif, donc aussi $f(x_2) - f(x_1)$. Ceci prouve que f est strictement croissante. Le point b) découle de a) appliqué à la fonction $-f$.

Sous les hypothèses de c), $f'(c)$ est non nul, donc aussi $f(x_2) - f(x_1)$. Ceci prouve que f est injective sur I, donc, par la proposition 23.3, que f est strictement monotone sur I. ■

Les résultats précédents sont très utiles : ils permettent comme vous le savez de décrire les variations d'une fonction dérivable en examinant le signe de sa dérivée. Le dernier résultat de ce numéro est peut-être un peu plus exotique, mais il découle directement de ce que nous avons vu, alors pourquoi se priver... Il dit que la dérivée d'une fonction dérivable vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. On sait que toute fonction continue a cette propriété (th. 22.1) ; cependant, il est important de remarquer qu'il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue (un exemple en est donné dans l'exercice 31.3). Le théorème dit par exemple que la fonction dont le graphe est dessin d'une fonction en escalier

n'est pas la dérivée d'une fonction.

Théorème 29.3.– *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert* I. *L'image $f'(\mathrm{I})$ de f' est un intervalle.*

Démonstration. On se donne des éléments x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$ et un réel c strictement compris entre $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$. On veut montrer qu'il existe un réel x entre x_1 et x_2 tel que $c = f'(x)$. Considérons la fonction $g : [x_1, x_2] \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(x) - cx$, et raisonnons par l'absurde : si g' ne s'annule pas, g est strictement monotone sur $[x_1, x_2]$ par la proposition 29.2, donc $g'(x_1)$ et $g'(x_2)$ sont du même signe. Mais cela contredit le fait que les réels $g'(x_1) = f'(x_1) - c$ et $g'(x_2) = f'(x_2) - c$ sont de signes opposés puisque c est strictement compris entre $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$; il existe donc un point de $]x_1, x_2[$ en lequel $g'(x) = f'(x) - c$ s'annule, ce qui montre le théorème. ∎

30. Dérivées des fonctions logarithmes et exponentielles

Démontrer la dérivabilité des fonctions logarithmes à partir de la définition que l'on en a donnée n'est pas si simple. Comme vous le savez déjà sûrement, nous allons démontrer que la dérivée de la fonction $\log_a$ est une fonction du type $x \mapsto \dfrac{c_a}{x}$, où c_a est une constante. Jusqu'à présent, rien ne permettait de préférer une base de logarithme à une autre; vue la forme de la dérivée de ces fonctions, il est clair qu'il existe une base a remarquable : celle pour laquelle la constante c_a vaut 1, c'est-à-dire celle dont la dérivée du logarithme est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On appelera cette base e, et le logarithme correspondant le logarithme népérien (du nom du mathématicien écossais John Neper (ou Napier), 1550–1617), noté simplement $\log$.

Nous commencerons par étudier la dérivabilité de $\log_a$ en 1, c'est-à-dire l'existence de la limite de $\dfrac{\log_a x}{x - 1}$ lorsque x tend vers 1.

Lemme 30.1.– *Pour tous réels* $x \geq -1$ *et* b , *vérifiant soit* $b \geq 1$, *soit* $b < 0$, *on a*
$$(1+x)^b \geq 1 + bx \ .$$

Pour b entier, nous avons déjà démontré cette inégalité dans le lemme 14.3.

Démonstration. Définissons une fonction sur $]-1,+\infty[$ en posant, pour tout $x > -1$,
$$f(x) = (1+x)^b - 1 - bx \ .$$

Pour b *rationnel*, cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, et (ex. 27.8.1)
$$f'(x) = b(1+x)^{b-1} - b = b\big((1+x)^{b-1} - 1\big) = b\Big[\frac{1}{(1+x)^{1-b}} - 1\Big] \ .$$

Si $b \geq 1$, cette fonction est croissante par (24.8); si $b < 0$, la fonction $x \mapsto (1+x)^{1-b}$ est croissante pour la même raison, donc la fonction entre crochets est décroissante, et son produit avec b est croissante. La fonction f' est donc croissante dans les deux cas. Comme $f'(0) = 0$, la fonction f' est négative pour $x \leq 0$ et positive pour $x \geq 0$. La fonction f est alors décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante pour $[0,+\infty[$; comme elle est nulle en 0 , elle est partout positive. On a donc montré le lemme pour b rationnel. Si b est maintenant un réel quelconque, on l'écrit comme limite d'une suite (b_n) de nombres rationnels; pour x fixé ≥ -1 , on a
$$(1+x)^{b_n} - 1 - b_n x \geq 0$$
pour tout n . Comme la fonction $b \mapsto (1+x)^b - 1 - bx$ est continue (*cf.* (24.8)), le membre de gauche de cette inégalité tend vers $(1+x)^b - 1 - bx$ lorsque n tend vers l'infini, de sorte que cette quantité est positive (conservation des inégalités larges par passage à la limite). ∎

Lemme 30.2.– *Pour* $a > 1$, *la fonction* $g :]0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbf{R}$ *définie par*
$$g(x) = \frac{\log_a x}{x-1}$$
est décroissante majorée sur $]1,+\infty[$, *et* $g(1/x) = xg(x)$.

Démonstration. Supposons $0 < x_1 < x_2$, avec $x_1 \neq 1$ et $x_2 > 1$. Le réel $b = \dfrac{x_2-1}{x_1-1}$ satisfait aux hypothèses du lemme précédent; si l'on prend $x = x_1 - 1$, il vient
$$\big(1 + (x_1-1)\big)^{\frac{x_2-1}{x_1-1}} \geq 1 + \frac{x_2-1}{x_1-1}\,(x_1-1) = x_2 \ .$$

On applique la fonction croissante $\log_a$ aux deux membres de cette inégalité; il vient
$$\frac{x_2-1}{x_1-1}\ \log_a x_1 \geq \log_a x_2 \ ,$$
c'est-à-dire $g(x_1) \geq g(x_2)$, puisque $x_2 - 1 > 0$. Cela montre d'une part que g est décroissante sur $]1,+\infty[$, et d'autre part que l'on a par exemple $g(1/2) \geq g(x_2)$, de sorte que g est majorée sur cet intervalle. Enfin, on a
$$g(\frac{1}{x}) = \frac{\log_a(1/x)}{\frac{1}{x}-1} = \frac{-x\log_a x}{1-x} = -xg(x) \ ,$$
ce qui démontre le lemme. ∎

DESSIN

Proposition 30.3.– *Pour tout réel $a > 0$ différent de 1, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$; il existe une constante c_a non nulle telle que, pour tout $x > 0$, on ait*

$$(\log_a)'(x) = \frac{c_a}{x} .$$

Démonstration. On peut supposer $a > 1$, puisque $\log_{1/a} = -\log_a$. Dans ce cas, la fonction g du lemme précédent est décroissante majorée sur $]1, +\infty[$, donc a une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs supérieures (prop. 23.4). L'équation fonctionnelle satisfaite par g entraîne que g a la même limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Il s'ensuit que $g(x)$, qui n'est autre que le taux d'accroissement de $\log_a$ entre 1 et x, a une limite quand x tend vers 1 ; on la note c_a, c'est la dérivée de $\log_a$ en 1. Le reste est facile : si x_0 est un réel strictement positif quelconque, on a, pour $x \neq x_0$ et $x > 0$,

$$\frac{\log_a(x) - \log_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{\log_a(\frac{x}{x_0})}{\frac{x}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0} g(\frac{x}{x_0}) .$$

Cette expression a comme limite c_a/x_0 lorsque x tend vers x_0, de sorte que $\log_a$ est dérivable en x_0, de dérivée c_a/x_0. La constante c_a n'est pas nulle car $\log_a$, qui prend la valeur 0 en 1 et la valeur 1 en a, n'est pas constante. ∎

La proposition 24.3 donne $c_b = c_a \log_b a$; il existe donc un unique réel a tel que $c_a = 1$. On a montré

Définition 30.4.– *Il existe un unique réel a tel que la dérivée de la fonction $\log_a$ soit la fonction $x \mapsto 1/x$. On le note e, et on appelle la fonction $\log_e$, notée simplement $\log$, le logarithme népérien.*

On peut aussi caractériser la fonction $\log$ comme étant l'unique fonction définie sur $]0, +\infty[$ qui vaut 0 en 1, et dont la dérivée est $x \mapsto 1/x$ (*cf.* exerc. 31.1).

Corollaire 30.5.– a) *Pour tout réel $a > 0$ différent de 1, la fonction logarithme de base a est dérivable sur $]0, +\infty[$, et*

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \log a} \ .$$

b) *Pour tout réel $a > 0$, la fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée*

$$x \longmapsto a^x \log a \ .$$

Démonstration. Le a) résulte du fait que $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$. Pour b), la fonction exponentielle de base a est la réciproque de $\log_a$; comme la dérivée de cette dernière fonction ne s'annule en aucun point par a), $x \mapsto a^x$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathbf{R}$, et sa dérivée en x est (prop. 27.7)

$$\frac{1}{(\log_a)'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \log a}} = a^x \log a \ .$$

Ceci démontre le corollaire. ∎

On peut aussi caractériser la fonction $x \mapsto e^x$ comme étant l'unique fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui vaut 1 en 0, et dont la dérivée est égale à elle-même (*cf.* exerc. 31.2).

Proposition 30.6.– *Pour tout réel a, la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^a$ est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = ax^{a-1}$, pour tout $x > 0$.*

Démonstration. On écrit $f(x) = e^{a \log x}$; le théorème 27.3 entraîne que f est dérivable et que

$$f'(x) = a \ \frac{1}{x} \ e^{a \log x} = ax^{-1}x^a = ax^{a-1} \ ,$$

ce qui démontre la proposition. ∎

EXERCICES

(31.1) Montrer qu'il existe une unique fonction définie sur $]0, +\infty[$ qui vaut 0 en 1, et dont la dérivée est $x \mapsto 1/x$.

(31.2) Soit c un réel; montrer qu'il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = c$ et $f' = f$.

(31.3) Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

(31.4) Utiliser le théorème des acroissements finis pour obtenir $\sqrt{626}$ à 10^{-2} près.

(31.5) Montrer que pour tout réel x, on a $e^x \geq 1 + x$.

(31.6) Soient p et q des réels strictement positifs vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Soit y un réel strictement positif; étudier la fonction

$$x \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \ .$$

b) En déduire que pour tous réels x et y, on a

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \ .$$

(31.7) Soient α et β des réels positifs vérifiant $\alpha + \beta = 1$, et x et y des réels positifs.

a) Etudier la fonction

$$x \mapsto (1+x)^\alpha (1+y)^\beta - 1 - x^\alpha y^\beta \ .$$

b) En déduire l'inégalité

$$1 + x^\alpha y^\beta \leq (1+x)^\alpha (1+y)^\beta \ .$$

(31.8) Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. Montrer que si f s'annule $n+1$ fois, sa dérivée s'annule n fois.

(31.9) Dans le théorème des accroissements finis, on écrit $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ avec $\theta \in]0,1[$; calculer θ en fonction de h et a lorsque

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = 2x^2 + 3x + 5 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

sans oublier de vérifier chaque fois que $\theta \in]0,1[$.

(31.10) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue, ayant des dérivées première et seconde sur $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$; on pose

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)\ \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} \ .$$

En appliquant le lemme de Rolle aux fonctions $f - \varphi$ et $f' - \varphi'$, montrer qu'il existe γ dans $]a,b[$ tel que

$$f(c) = (c-a)(c-b)\ \frac{f''(\gamma)}{2} \ .$$

(31.11) Retrouver la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ à l'aide de la définition de la dérivée (n est un entier, et x est non nul si $n < 0$).

(31.12) Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition. Sont-elles dérivables ?

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0 \quad f(0) = 0$

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0 \quad f(0) = 0$

c) $f :]-1,1[\to \mathbf{R} \qquad f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

d) $f :]-1,1[\to \mathbf{R} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

(31.13) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^4(2 + \sin\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée est continue.

(31.14) Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ et $x \mapsto (\sin\sqrt{x}) - \sqrt{x}$.

(31.15) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Montrer que si $f^3 + f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbf{R}$. Donner un exemple pour montrer que si f^2 est dérivable sur $\mathbf{R}$, la fonction f n'est pas nécéssairement dérivable sur $\mathbf{R}$.

(31.16) Soient $x_0 \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en x_0. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0) \ .$$

Montrer que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ peut exister sans que f soit dérivable en x_0.

(31.17) Soit $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ une application continue en 0 telle que $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ possède une limite finie en 0. Montrer que f est dérivable en 0.

(31.18) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2\log(x)$.

a) Montrer que f est une bijection.

b) On pose $g = f^{-1}$. Calculer $g'(1)$ puis déterminer t et x tels que $g'(t) = 1/5$ et $f(x) = t$.

(31.19) On considère la suite définie par

$$u_0 \neq \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \ .$$

a) On suppose que $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{3 - 2x}$ sur $\mathbf{R} - \{3/2\}$. En déduire que u_n est dans $]0, 1[$ pour tout entier n, et que la suite (u_n) est monotone. En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

b) Que se passe-t-il si $u_0 = 0$ ou si $u_0 = 1$?

c) On suppose maintenent que $u_0 = -\frac{1}{2}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n < 0$ et que la suite (u_n) est monotone. En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

d) Que se passe-t-il si $1 < u_0 < 3/2$?

APPENDICE A

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

32. Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 32.1.– *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On va d'abord démontrer le lemme suivant. Il suffira ensuite d'appliquer le théorème 15.2 pour avoir démontré le théorème. ∎

Lemme 32.2.– *De toute suite, on peut extraire une suite monotone.*

Démonstration. On considère la partie E de $\mathbf{N}$ définie par

$$\mathrm{E} = \{n \in \mathbf{N} \mid u_n \quad \text{majore} \quad u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\} .$$

Si E est infini, on range ses éléments dans l'ordre croissant :

$$\mathrm{E} = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \quad \text{avec} \quad n_k < n_{k+1} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad k .$$

On a alors $u_{n_1} \geq u_{n_2} \geq \cdots$ par définition de E et on a bien construit une sous-suite décroissante.

Sinon, l'ensemble E est fini, donc on peut trouver un entier m_1 strictement plus grand que tous les éléments de E. Comme $m_1 \notin \mathrm{E}$, il existe un entier $m_2 > m_1$ tel que $u_{m_2} > u_{m_1}$. Comme $m_2 \notin \mathrm{E}$, on peut recommencer. On construit ainsi une sous-suite strictement croissante, ce qui finit la démonstration du lemme et du théorème. ∎

33. Limites supérieure et inférieure

On a vu dans le chapitre II que les suites monotones sont très agréables, puisqu'elles ont toujours une limite (finie ou infinie). Il n'en est évidemment pas de même pour les suites quelconques ; néanmoins, nous allons voir que l'on peut toujours attacher à une suite bornée une suite croissante et une suite décroissante.

Soit (u_n) une suite ; pour tout entier n, on pose

$$\overline{u}_n = \sup\ \{u_m \mid m \geq n\} \qquad\qquad \underline{u}_n = \inf\ \{u_m \mid m \geq n\} .$$

Si la suite (u_n) est majorée, on définit ainsi une suite numérique $(\overline{u}_n)$, dont on vérifie facilement qu'elle est décroissante. Elle converge donc vers une limite finie ou égale à $-\infty$, que l'on appelle la *limite supérieure* de la suite (u_n), et que l'on note $\overline{\lim}(u_n)$. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, on pose $\overline{\lim}(u_n) = +\infty$.

Si la suite (u_n) est minorée, on définit ainsi une suite numérique $(\underline{u}_n)$, dont on vérifie facilement qu'elle est croissante. Elle converge donc vers une limite finie ou égale à $+\infty$, que l'on appelle la *limite inférieure* de la suite (u_n), et que l'on note $\underline{\lim}(u_n)$. Si la suite (u_n) n'est pas minorée, on pose $\underline{\lim}(u_n) = -\infty$.

L'intérêt des limites supérieure et inférieure réside dans le fait qu'elles existent toujours (dans $\overline{\mathbf{R}}$), même si la suite est divergente. On a $\underline{u}_n \leq \overline{u}_n$ pour tout n, de sorte que $\underline{\lim}(u_n) \leq \overline{\lim}(u_n)$.

Exemples 33.1. 1) Considérons la suite bornée $u_n = (-1)^n$. Pour tout n, on a

$$\overline{u}_n = \sup \{(-1)^m \mid m \geq n\} = 1 \qquad \text{et} \qquad \underline{u}_n = \inf \{(-1)^m \mid m \geq n\} = -1 \ ,$$

de sorte que $\underline{\lim}((-1)^n) = -1$ et $\overline{\lim}((-1)^n) = 1$.

2) Considérons la suite bornée $u_n = 1/n$. Pour tout n, on a

$$\overline{u}_n = \sup \{1/m \mid m \geq n\} = 1/n \qquad \text{et} \qquad \underline{u}_n = \inf \{1/m \mid m \geq n\} = 0 \ ,$$

de sorte que $\underline{\lim}(1/n) = \overline{\lim}(1/n) = 0$.

Théorème 33.2.– *Pour qu'une suite numérique soit convergente dans $\overline{\mathbf{R}}$ vers ℓ, il faut et il suffit que $\underline{\lim}(u_n) = \overline{\lim}(u_n) = \ell$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer d'une part que si une suite est convergente, ses limites supérieure et inférieure sont égales à sa limite, d'autre part que si les limites supérieure et inférieure d'une suite sont égales, cette suite est convergente.

Soit donc (u_n) une suite convergente; supposons d'abord sa limite ℓ *finie*. Soit ε un réel strictement positif; il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, on ait $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a alors $\ell - \varepsilon < u_m$ et $u_m < \ell + \varepsilon$ pour tout $m \geq n$, de sorte que

$$\ell - \varepsilon \leq \inf \{u_m \mid m \geq n\} = \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup \{u_m \mid m \geq n\} \leq \ell + \varepsilon$$

On peut « passer à la limite » ; puisque $\ell - \varepsilon \leq \underline{u}_n$ pour tout n assez grand, on a $\ell - \varepsilon \leq \lim(\underline{u}_n) = \underline{\lim}(u_n)$. On montre de même que $\overline{\lim}(u_n) \leq \ell + \varepsilon$. On a donc montré que pour tout réel strictement positif ε, on a

$$\ell - \varepsilon \leq \underline{\lim}(u_n) \leq \overline{\lim}(u_n) \leq \ell + \varepsilon \ .$$

Cela entraîne $\underline{\lim}(u_n) = \overline{\lim}(u_n) = \ell$. Le cas où la limite ℓ est infinie se traite de façon analogue, et sera laissé aux lecteurs.

Soit maintenant une suite (u_n) dont les limites supérieure et inférieure sont égales. De nouveau, nous ne traiterons que le cas où elles sont *finies*, égales à un réel ℓ, les autres cas étant laissés aux lecteurs. De façon générale, on a pour tout n les inégalités

$$\underline{u}_n = \inf \{u_m \mid m \geq n\} \leq u_n \leq \sup \{u_m \mid m \geq n\} = \overline{u}_n \ .$$

Comme les suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ convergent par hypothèse vers la même limite ℓ, il en est de même de la suite (u_n). ∎

APPENDICE B

CONSTRUCTION DES LOGARITHMES

Nous donnons ici une démonstration de l'existence des fonctions logarithmes, admise au chapitre III. Montrons d'abord :

Proposition 34.1.– *Pour tout réel* $a > 1$ *, il existe une unique fonction strictement croissante* $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ *telle que*

a) $f(xy) = f(x) + f(y)$.

b) $f(a) = 1$.

Supposons qu'une telle fonction existe. On aura alors

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$$

donc $f(1) = 0$, et

$$f(x^n) = f(x^{n-1} \times x) = f(x^{n-1}) + f(x) = nf(x)$$

(par récurrence sur n). En particulier,

$$f(a^n) = nf(a) = n \ .$$

Pour construire une fonction f comme dans l'énoncé de la proposition, on commence donc par comparer les nombres réels positifs aux puissances de a .

Lemme 34.2.– *Pour tout réel* $x > 0$ *, il existe un entier relatif* m *tel que* $a^m \leq x < a^{m+1}$.

Démonstration. Comme $a > 1$, on a $\lim_{n \to +\infty}(a^n) = +\infty$ (voir 14.2) et $\lim_{n \to -\infty}(a^n) = 0$. Il existe donc un plus petit entier relatif m tel que $x < a^{m+1}$. On a alors $a^m \leq x$, d'où le lemme. ■

Démonstration de la proposition. La première étape est de *définir* une fonction f . Fixons un réel $x > 0$ et considérons la partie A_x de $\mathbf{R}$ définie par

$$\mathrm{A}_x = \{ \ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid q \geq 1 \quad \text{et} \quad a^p \leq x^q \ \}$$

(il faut remarquer que $a^p \leq x^q$ équivaut à $a^{kp} \leq x^{kq}$ pour tout entier k de sorte que cette propriété dépend de la fraction p/q seulement, et pas du choix de p et q).

La partie A_x est une partie *majorée* de $\mathbf{R}$: si m est l'entier donné par le lemme, c'est-à-dire si $a^m \leq x \leq a^{m+1}$, alors $m+1$ majore A_x. En effet, si $p/q \in A_x$, on a $p/q \leq m+1$ puisque $a^p \leq x^q \leq a^{(m+1)q}$. Donc A_x a une borne supérieure dans $\mathbf{R}$. Remarquons que si $p/q \in A_x$, et que f est une fonction vérifiant les conditions de la proposition, on a $a^p \leq x^q$, donc $p = f(a^p) \leq f(x^q) = qf(x)$ puisque f est croissante. On en déduit $f(x) \geq \sup A_x$. Inversement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel p'/q' tel que $\sup A_x + \varepsilon \geq p'/q' > \sup A_x$. On a alors $p'/q' \notin A_x$, de sorte que $a^{p'} > x^{q'}$, et $p' = f(a^{p'}) > f(x^{q'}) = q'f(x)$ puisque f est strictement croissante. On a donc $f(x) < p'/q' \leq \sup A_x + \varepsilon$, ceci pour tout ε. Cela montre déjà l'unicité de la fonction f : si elle existe, on doit avoir $f(x) = \sup A_x$ pour tout $x > 0$. On *définit* maintenant f ainsi, et il faut vérifier qu'elle satisfait bien aux conditions de la proposition.

Tout d'abord, puisque $a > 1$, des entiers p et q vérifient $a^p \leq a^q$, si et seulement si $p \leq q$. Ensuite, on a

$$A_a = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid a^p \leq a^q \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid p \leq q \right\} ,$$

de sorte que $f(a) = \sup A_a = 1$.

(34.3) Remarquons que, si $a^p \leq x^q \leq a^{p+r}$, alors $p/q \in A_x$, de sorte que $f(x) \geq p/q$. Ensuite, pour tout p'/q' dans A_x, on a $a^{p'} \leq x^{q'}$, et

$$a^{p'q} \leq x^{q'q} = (x^q)^{q'} \leq (a^{p+r})^{q'} = a^{(p+r)q'} ,$$

de sorte que $p'q \leq (p+r)q'$ et $p'/q' \leq (p+r)/q$. On a donc $p/q \leq f(x) \leq (p+r)/q$.

Montrons maintenant que cette fonction vérifie « l'équation fonctionnelle » (24.1). Donnons-nous des réels x et y. Pour tout entier $q \geq 1$, il existe par le lemme des entiers p et p' tels que

$$a^p \leq x^q \leq a^{p+1} \quad , \qquad a^{p'} \leq y^q < a^{p'+1} ,$$

de sorte que

$$a^{p+p'} \leq (xy)^q \leq a^{p+p'+2} .$$

Mais alors, on a par (34.3)

$$\frac{p}{q} \leq f(x) \leq \frac{p+1}{q} \quad , \quad \frac{p'}{q} \leq f(y) \leq \frac{p'+1}{q} \quad , \quad \frac{p+p'}{q} \leq f(xy) \leq \frac{p+p'+2}{q} .$$

En ajoutant les deux premières inégalités, on obtient

$$\frac{p+p'}{q} \leq f(x) + f(y) \leq \frac{p+p'+2}{q} ,$$

de sorte que

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{q} ,$$

ceci pour tout entier $q \geq 1$. Donc $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Montrons à présent que f est *strictement croissante*. Comme elle transforme multiplication en addition, il est naturel de considérer, si $0 < x < y$, le rapport $z = \dfrac{y}{x} > 1$.

Comme $\lim_{n \to +\infty}(z^n) = +\infty$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a < z^n$. Alors $\frac{1}{n} \in \mathrm{A}_z$ et donc $f(z) \geq \frac{1}{n} > 0$. Enfin

$$f(y) = f(zx) = f(z) + f(x) > f(x) \ .$$

On a ainsi fini la démonstration de la proposition. ■

La fonction f ainsi définie grâce au réel $a > 1$ est le logarithme de base a, noté $\log_a$. Si a est un réel tel que $0 < a < 1$, la fonction $-\log_{1/a}$ vérifie l'équation fonctionnelle et prend la valeur 1 en a, ce qui justifie de la noter aussi $\log_a$. Elle est, bien sûr, décroissante.

APPENDICE C

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

35. Un premier résultat

Le résultat suivant est parfois très utile pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point (voir cependant la remarque qui suit la démonstration).

THéorème 35.1.– *Soient* I *un intervalle ouvert et* x_0 *un point de* I. *Soit* f *une fonction continue sur* I *et dérivable sur* $\mathrm{I}-\{x_0\}$. *Si la limite en* x_0 *de* $f'(x)$ *existe et est finie, alors la fonction* f *est dérivable en* x_0 *et on a*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to c} f'(x) \ .$$

Démonstration. On veut démontrer que f est dérivable en x_0 et donc étudier

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ .$$

Si x est distinct de x_0, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités x_0 et x et elle est dérivable sur l'intervalle ouvert de mêmes extrémités. D'après le théorème des accroissements finis 28.3, il existe un réel c strictement compris entre x_0 et x tel que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c) \ .$$

Lorsque x tend vers x_0, il en est de même de c, et l'on obtient

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{c\to c} f'(c) \ ,$$

ce qui implique le résultat. ∎

Remarque 35.2. La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que la limite de la dérivée n'existe pas que la fonction n'est pas dérivable en ce point ; en d'autres termes, la dérivée n'est pas nécessairement continue (*cf.* exerc. 31.3).

36. Théorème du point fixe

Le résultat suivant est utile pour déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations. Il complète le théorème 22.2 : il permet d'obtenir des valeurs approchées d'un point fixe avec des hypothèses un peu plus fortes sur la fonction.

Théorème 36.1.– *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et qu'il existe $k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout x dans $[a,b]$. Alors f admet un unique point fixe dans $[a,b]$ qui est obtenu comme limite de toute suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec u_0 quelconque dans $[a,b]$).*

Démonstration. Le point fixe (dont on connaît déjà l'existence par le th. 22.2) est unique car si c_1 et c_2 sont deux points fixes de f, on obtient en appliquant l'inégalité des accroissements finis 28.4

$$|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| \leq k|c_1 - c_2| ,$$

ce qui n'est possible que si c_1 et c_2 sont égaux (car $0 \leq k < 1$). Montrons que toute suite définie dans l'énoncé converge bien vers ce point fixe, que l'on note c. Comme $f(c) = c$, on obtient

$$|u_n - c| = |f(u_{n-1}) - f(c)| \leq k|u_{n-1} - c| ,$$

d'où (par récurrence)

$$|u_n - c| \leq k^n |u_0 - c| .$$

Ceci implique bien la convergence de la suite u_n vers c et donne une majoration de l'erreur commise en remplaçant c par u_n. ∎

Il faut impérativement que la constante k de l'énoncé soit strictement inférieure à 1 : si $f : [0,1] \to [0,1]$ est la fonction définie par $f(x) = 1 - x$, une suite (u_n) comme dans l'énoncé ne converge en général pas vers le point fixe $1/2$ de f.

37. Règle de l'Hospital

Cette règle est parfois pratique pour calculer des limites. Il faut cependant s'en méfier, car ses hypothèses sont nombreuses mais indispensables (*cf.* remarque 37.2.3) ci-dessous). Il est souvent tout aussi rapide de s'en passer (*cf.* remarque 37.2.1) ci-dessous).

Théorème (Règle de l'Hospital) 37.1.– *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et soit c un point de I. On suppose que*

(i) *f et g sont continues sur I ;*

(ii) *f et g sont dérivables sur I sauf éventuellement en c ;*

(iii) *$g'(x) \neq 0$ pour $x \in \mathrm{I} - \{c\}$;*

(iv) *$f(c) = g(c) = 0$.*

Si la fonction $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite finie en c alors on a

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Faisons quelques remarques avant de passer à la démonstration de cette règle.

Remarques 37.2. 1) **Cas où il est inutile d'appliquer la règle de l'Hospital.** Si on suppose que les fonctions f et g vérifient les propriétés (i) à (iv) et que, de plus, elles sont dérivables en c avec $g'(c) \neq 0$, on a

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Il suffit en effet d'écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \times \frac{x-c}{g(x)-g(c)} ,$$

et d'appliquer la définition de la dérivée de f et de g au point c. On a par exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = 1 \quad ,$$

car $x \longmapsto e^x - 1$ a pour dérivée 1 en $x = 0$ et $x \longmapsto \sin x$ a pour dérivée 1 en $x = 0$.

2) **Cas où il est utile d'appliquer la règle de l'Hospital.** Considérons la fonction F définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\log(1+x)} & \text{pour } x \neq 0 , \\ 1 & \text{pour } x = 0 . \end{cases}$$

Cette fonction est-elle dérivable en 0 ? Il s'agit d'étudier

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)} .$$

Définissons f et g par $f(x) = x - \log(1+x)$ et $g(x) = x\log(1+x)$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $]-1,+\infty[$ et nulles en 0. Comme on a $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $g'(x) = \log(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$, on a $f'(0) = g'(0) = 0$. On ne peut donc pas appliquer la remarque 1), ni directement la règle de l'Hospital puisque l'on ignore si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite finie en 0. On a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{x+(1+x)\log(1+x)} .$$

On définit alors deux fonctions α et β sur $]-1,+\infty[$ en posant $\alpha(x) = x$ et $\beta(x) = x + (1+x)\log(1+x)$. Ces deux fonctions sont dérivables en 0 et on obtient

$$\alpha'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta'(0) = 2 .$$

En appliquant la remarque 1) on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{2} ,$$

et en appliquant la règle de l'Hospital à f et g,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} .$$

La fonction F est donc dérivable en 0 et sa dérivée est égale à $1/2$.

3) **La règle de l'Hospital est fausse.** Considérons les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} + 2x^3 \sin\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\cos\frac{1}{x} + x^2 \sin\frac{1}{x} .$$

Ces deux fonctions se prolongent par continuité en 0 et sont dérivables sur $]0,+\infty[$. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x} + 3x^2 \sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3+x}{2x^2+1} = 0 .$$

En revanche, on montre que f/g n'admet pas de limite en 0 car

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x\cos\frac{1}{x} + 2x^2\sin\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}} .$$

Quelle est l'hypothèse de la règle de l'Hospital qui n'est pas vérifiée ?

4) **La réciproque de la règle de l'Hospital est fausse.** Prenons en effet

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad , \qquad g(x) = x \quad , \qquad \mathrm{I} = \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad c = 0 .$$

Les fonctions f et g vérifient les propriétés (i) à (iv). La limite en 0 de f/g vaut 0 et pourtant la limite en 0 de f'/g' n'existe pas.

La démonstration de la règle de l'Hospital repose sur le lemme ci-dessous qui est une généralisation de la formule des accroissements finis.

Lemme de Cauchy 37.3.– *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que f et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, et que de plus $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a,b[$. Il existe alors un élément $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Démonstration. Considérons la fonction h définie sur $[a,b]$ par

$$h(x) = g(x)[f(b)-f(a)] - f(x)[g(b)-g(a)] .$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus,

$$h(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(b) .$$

On déduit donc du lemme de Rolle 28.2 l'existence d'un élément c de $]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui s'écrit

$$g'(c)[f(b)-f(a)] = f'(c)[g(b)-g(a)] .$$

Comme $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a,b[$, le théorème des accroissements finis 28.3 pour g implique que $g(a)-g(b) \neq 0$. On peut donc diviser les deux membres de cette égalité par $g'(c)(g(b)-g(a))$ pour obtenir le résultat du lemme. ∎

Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est que l'on obtient le même c au numérateur et au dénominateur. En effet, si on se contentait d'appliquer le théorème des accroissements finis à f et à g on obtiendrait une fraction égale à $\dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$ avec $c_1 \neq c_2$ en général.

Démonstration de la règle de l'Hospital. Soit x un élément de I. Les propriétés (i), (ii) et (iii) permettent d'appliquer le lemme de Cauchy aux fonctions f et g sur l'intervalle d'extrémités x et c. Il existe donc un élément d strictement compris entre x et c tel que

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(d)}{g'(d)} \ .$$

On a donc en utilisant (iv)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(d)}{g'(d)} \ .$$

Comme f'/g' admet une limite finie ℓ en c, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que

$$0 < |d-c| < \delta \Longrightarrow |\frac{f'(d)}{g'(d)} - \ell| < \varepsilon \ .$$

Or $0 < |x-c| < \delta$ implique (vu la définition de d) $0 < |d-c| < \delta$. On en déduit donc que f/g admet aussi ℓ pour limite en c. ∎