PARIS 7 MA1 (MASS)
2008-2009 Groupe 1M3

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 7

Quelques exercices de logique

Exercice 1. Quelles sont les variables libres et les variables muettes (ou liées) dans les expressions suivantes ?

1. $\sum_{i=1}^{n} 1$.
2. $\lim_{x\to a} x^2$.
3. $\exists x,\ x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$.
4. Les droites d'équation $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont parallèles.
5. L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.
6. Valeur en a de $x \mapsto x^2$
7. Pour tout entier n, il existe un entier p tel que $p > n$.
8. Le plus petit entier n tel que $2^n > 1000$.
9. $x \in \mathrm{A}$.
10. $f(0) = 0$.
11. Si $x \geqslant a$, alors $x > 0$ (x et a désignent des réels).
12. Si $x \geqslant a$, alors $x > 0$ (x et a désignent des entiers).
13. $x < 1/n$ pour tout entier n (x désigne un réel).
14. $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
15. $\forall x, \forall y,\ (x \in \mathrm{A})$ et $(y \in \mathrm{B}) \Rightarrow x = y$.
16. $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} 1$.
17. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Exercice 2. Pour chacune des expressions numériques ou logiques de l'exercice précédent, donner une expression équivalente ne comportant pas de variable muette (sauf pour l'expression 17).

Exercice 3. Écrire la négation des expressions logiques de l'exercice 1 (expressions 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15).

Exercice 4. On sait que « $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ » $\Leftrightarrow$ « $\forall x,\ x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B}$ ». À quoi sert le $\forall x$ dans la seconde assertion ?

Exercice 5. Écrire avec des quantificateurs :

- Tout nombre réel a une racine carrée.
- Tous les nombres réels ne possèdent pas une racine carrée.
- Il n'existe pas de plus grand entier.
- Il existe un plus grand entier.
- L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.
- L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution.
- L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution et une seule.
- L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions.
- p est le plus petit entier tel que $2^p > 1000$. (Certains préféreront la formulation « p est le plus petit entier n tel que $2^n > 1000$ ». Pourquoi ?)
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
- La fonction $x \mapsto \cos x$ atteint son maximum pour $x = 0$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ ne possède ni maximum ni minimum.
- L'énoncé du theorème des valeurs intermédiaires.
- $\mathrm{A} = \varnothing$.
- $\mathrm{A} \neq \varnothing$.

Exercice 6. Que signifie l'énoncé
$$\forall p, \forall q,\ n = pq \Rightarrow (p = 1 \text{ ou } q = 1)$$
(n, p, q désignent des entiers > 0) ?

Exercice 7. Que signifie l'énoncé
$$\forall x, \forall y, (x \in \mathrm{A}) \ \text{ et } \ (y \in \mathrm{A}) \Rightarrow x = y\ ?$$
Écrire l'énoncé contraire et expliquer en français sa signification.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Que signifie l'énoncé

(E) $$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ f(x) = f(y)\ ?$$

Que signifie l'énoncé

(E′) $$\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ f(x) = f(y)\ ?$$

Exercice 9. Donner un exemple convaincant (pris dans la vie courante ou en mathématiques) montrant que les énoncés

(E) $$\forall x,\ \ \exists y,\ \ \mathrm{P}(x,y)$$

et

(E) $$\exists y,\ \ \forall x,\ \ \mathrm{P}(x,y)$$

(où $\mathrm{P}(x,y)$ est une propriété dépendant de x et y) n'ont pas du le même sens.

Exercice 10. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Écrire avec des quantificateurs :
a) f est surjective ;
b) f est injective.

Exercice 11. On considère l'énoncé : « Pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède une racine réelle, il faut et il suffit que $b^2 - 4ac \geqslant 0$ ». On veut démontrer la partie « il faut ». Que doit-on démontrer ?

Exercice 12. « Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle est qu'il ait deux angles égaux. » Que signifie « la condition est nécessaire » ? Que signifie « la condition est suffisante » ?

Exercice 13. Donner un exemple de condition suffisante et non nécessaire. Donner un exemple de condition nécessaire et non suffisante.

Exercice 14. On considère l'énoncé (E) « Toute fonction continue est dérivable ». Quelle est la négation de cet énoncé ? Quel est l'énoncé réciproque ?

Exercice 15. Démontrer que si un nombre premier $p > 2$ est somme de deux carrés, il est de la forme $4n + 1$. Que pensez-vous de la réciproque ?