Examen de Géométrie Algébrique Réelle – à rendre le 30/04/2021

Exercice 1 (Courbes de genre 1 sans points réels)**.**

Soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \sigma\}$ où σ est la conjugaison complexe. Soit Z une surface de Riemann compacte connexe G-équivariante de genre 1. On suppose que $Z^G = \varnothing$.

1. Montrer qu'il existe un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ et une bijection antiholomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que Z est biholomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda$ et que l'involution antiholomorphe de Z est induite par f.
2. Montrer que f est antiaffine (c'est-à-dire que $z \mapsto \overline{f(z)}$ est affine).
3. Montrer que l'on peut choisir $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ où $\tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, et $f(z) = \overline{z} + 1/2 + ia$ où $a \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que l'on peut de plus choisir $a = 0$ et $\tau = ib$ pour $b \in \mathbb{R}_+^*$.

   Ainsi, Z est biholomorphe à la surface de Riemann G-équivariante $Z_b := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus ib\mathbb{Z})$ avec involution antiholomorphe σ induite par $z \mapsto \overline{z} + 1/2$.
5. Pour quels $b, b' \in \mathbb{R}_+^*$ existe-t-il un biholomorphisme G-équivariant entre Z_b et $Z_{b'}$?
6. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Montrer que la série $z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$ définit une fonction méromorphe paire sur $\mathbb{C}$.
7. Montrer que celle-ci induit une fonction holomorphe $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré deux.
8. Supposons que $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus ib\mathbb{Z}$ pour $b \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que $\mathbb{C}/\Lambda = Z_b$. Soit $\pi : Z_b \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'application holomorphe donnée par $\pi(z) = \wp(z + ib/4)$.

   Montrer qu'il existe une involution antiholomorphe $\tau : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telle que $\pi(\sigma(z)) = \tau(\pi(z))$ pour tout $z \in Z_b$.
9. Montrer que τ n'a pas de points fixes.
10. Soit $\Gamma := \{X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la conique réelle sans points réels. Déduire de ce qui précède que si C est une courbe projective lisse connexe de genre 1 sur $\mathbb{R}$ telle que $C(\mathbb{R}) = \varnothing$, il existe un morphisme de variétés algébriques réelles $\pi : C \to \Gamma$.

Exercice 2 (Variétés de Severi-Brauer)**.**

1. Montrer que tous les morphismes algébriques de variétés algébriques complexes $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sont de la forme $[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [P_0(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : P_0(x_0, \ldots, x_n)]$, où les $P_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ sont homogènes de même degré.
2. En déduire que le groupe des automorphismes de la variété algébrique complexe $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$.
3. Si n est impair, montrer que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ admet une forme réelle sans point réel. On la note $\mathbb{SB}^n_{\mathbb{R}}$.
4. Quelle variété algébrique est $\mathbb{SB}^1_{\mathbb{R}}$?
5. Montrer que si $n \leq m$ sont des entiers impairs, il existe un morphisme de variétés algébriques réelles $\mathbb{SB}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{SB}^m_{\mathbb{R}}$.
6. Montrer que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ n'admet pas d'autres formes réelles que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (pour tout n) et $\mathbb{SB}^n_{\mathbb{R}}$ (pour n impair).

Exercices 3 et 4 page suivante

Exercice 3 (Le théorème de Nash–Tognoli pour les sous-variétés).

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte et $N \subset M$ une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ fermée.

1. Montrer qu'il existe $n \geq 0$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(N) \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble algébrique non singulier et $f|_N : N \to f(N)$ est un difféomorphisme.

2. Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe $m \geq 0$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ $g : M \to \mathbb{R}^m$ telle que $g|_N$ est constante et telle que $(f, g) : M \to \mathbb{R}^{n+m}$ est immersive en x.

3. Soient $x, y \in M$ distincts. Montrer qu'il existe $m \geq 0$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ $g : M \to \mathbb{R}^m$ telle que $g|_N$ est constante et telle que $(f, g)(x) \neq (f, g)(y)$.

4. En déduire l'existence de $k \geq 0$ et d'un plongement $\mathcal{C}^\infty$ $\phi : M \to \mathbb{R}^k$ tel que $\phi(N) \subset \mathbb{R}^k$ est un ensemble algébrique non singulier.

5. Expliquer comment modifier l'argument de Tognoli pour montrer l'existence de $l \geq 0$ et d'un plongement $\mathcal{C}^\infty$ $\psi : M \to \mathbb{R}^l$ tels que $\psi(M)$ et $\psi(N)$ sont des ensembles algébriques non singuliers.

Exercice 4 (Le théorème EPT de Bröcker).

Soit X une variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe (pour le produit tensoriel) des fibrés en droites algébriques sur X. Notons $G = \{L \in \mathrm{Pic}(X) \mid w_1(L(\mathbb{R})) = 0 \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}$.

Si $D \subset X$ est une sous-variété algébrique fermée de codimension pure 1 dans X, on note $\mathcal{O}(D)$ le fibré en droites algébrique sur X muni d'une section $s_D \in H^0(X, \mathcal{O}(D))$ telle que $D = \{s_D = 0\}$. Soit $H \subset \mathrm{Pic}(X)$ le sous-groupe engendré par les $\mathcal{O}(D)$ pour les D comme ci-dessus tels que $D(\mathbb{R}) = \varnothing$.

1. Montrer que $H \subset G$.

2. Soit $L \in G$. Montrer qu'il existe un voisinage affine $U \subset X$ de $X(\mathbb{R})$, une surjection $\phi : \mathcal{O}_U^N \to L|_U$ de fibrés vectoriels algébriques sur U et une application $\mathcal{C}^\infty$ $f : X(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^N$ tels que la section $\phi(\mathbb{R}) \circ (f, \mathrm{Id}) : X(\mathbb{R}) \to L(\mathbb{R})$ de $L(\mathbb{R})$ est nulle part nulle (on a noté $(f, \mathrm{Id}) : X(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^N \times X(\mathbb{R})$ la section du fibré trivial sur $X(\mathbb{R})$ induite par f).

3. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset X$ de $X(\mathbb{R})$ tel que $L|_V$ est trivial.

4. En déduire que $H = G$.